# ELES ENFRENTARAM MULTIDÕES E VENCERAM

TROPA DO ELITE

## COLÉGIO NAVAL 2011

**86 APROVADOS**


**1º LUGAR GERAL DO BRASIL**

*Victor Feitosa (1ª Fase)*

**A MAIOR APROVAÇÃO DO BRASIL**

26 alunos entre os 100 primeiros do Brasil

SISTEMA ELITE DE ENSINO

**BOLSÃO 2012**

**JUNTE-SE A NÓS!**

(21) 3350-1918

sistemaeliterio.com.br

## GABARITO – Prova Verde

### MATEMÁTICA

| | | | |
|---|---|---|---|
| **01** | E | **11** | D |
| **02** | D | **12** | A |
| **03** | E | **13** | ANULADA |
| **04** | E | **14** | ANULADA |
| **05** | D | **15** | B |
| **06** | D | **16** | C |
| **07** | B | **17** | C |
| **08** | E | **18** | B |
| **09** | A | **19** | A |
| **10** | C-Passível de anulação | **20** | A |

## GABARITO – Prova Rosa

### MATEMÁTICA

| | | | |
|---|---|---|---|
| **01** | D | **11** | E |
| **02** | A | **12** | D |
| **03** | B | **13** | A |
| **04** | A | **14** | E |
| **05** | E | **15** | C-Passível de anulação |
| **06** | D | **16** | D |
| **07** | C | **17** | ANULADA |
| **08** | B | **18** | C |
| **09** | ANULADA | **19** | E |
| **10** | A | **20** | B |

## GABARITO – Prova Azul

### MATEMÁTICA

| | | | |
|---|---|---|---|
| **01** | D | **11** | A |
| **02** | B | **12** | E |
| **03** | A | **13** | C |
| **04** | ANULADA | **14** | D |
| **05** | B | **15** | A |
| **06** | A | **16** | B |
| **07** | D | **17** | E |
| **08** | C | **18** | C-Passível de anulação |
| **09** | E | **19** | ANULADA |
| **10** | E | **20** | D |

## GABARITO – Prova Amarela

### MATEMÁTICA

| | | | |
|---|---|---|---|
| **01** | E | **11** | D |
| **02** | A | **12** | A |
| **03** | E | **13** | B |
| **04** | C | **14** | D |
| **05** | A | **15** | C |
| **06** | B | **16** | E |
| **07** | D | **17** | E |
| **08** | ANULADA | **18** | A |
| **09** | ANULADA | **19** | B |
| **10** | C – Passível de anulação | **20** | D |

**GABARITO COMENTADO – Prova Amarela**

# PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2011/2012 (PROVA AMARELA)

**01.** É correto afirmar que o número $5^{2011} + 2 \cdot 11^{2011}$ é múltiplo de

a) 13 b) 11 c) 7 d) 5 e) 3

**RESOLUÇÃO:**

$5 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 5^{2011} \equiv -1 \pmod 3$
$11 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 11^{2011} = -1 \pmod 3$
$5^{2011} + 2.11^{2011} \equiv (-1) + 2(-1) \equiv -3 \equiv 0 \pmod 3$

Portanto, este número é múltiplo de 3.

Podemos observar também que:

$$
\begin{aligned}
5^{2011} + 2.11^{2011} &\equiv 0 + 2.1 \equiv 2 \pmod 5 \\
5^{2011} + 2.11^{2011} &\equiv (-2)^{2011} + 2.(4)^{2011} \pmod 7 \\
&\equiv \left( (-2)^3 \right)^{670}.(-2) + 2^3.(2^3)^{1340} \pmod 7 \\
&\equiv (-2) + 8.1 \equiv 6 \pmod 7 \\
5^{2011} + 2.11^{2011} &\equiv 5^{2011} + 0 \equiv 5^{2011} \not\equiv 0 \pmod{11} \\
5^{2011} + 2.11^{2011} &\equiv (5^2)^{1005}.5 + 2.(-2)^{2011} \pmod{13} \\
&\equiv (-1)^{1005}.5 + 2.\left( (-2)^6 \right)^{335}.(-2) \pmod{13} \\
&\equiv -5 + 2(-1)^{335}.(-2) \pmod{13} \\
&\equiv -5 + 4 \equiv 12 \pmod{13}
\end{aligned}
$$

Logo, $5^{2011} + 2 \cdot 11^{2011}$ não pode ser múltiplo de 5, 7, 11 e 13.

**Resposta: E**

---

**02.** A solução real da equação $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{8}{x+1} = \dfrac{9}{x^2-1}$ é um divisor de

a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 19

**RESOLUÇÃO:**

$$\frac{7\left(x^2-1\right)}{x-1} - \frac{8\left(x^2-1\right)}{x+1} = 9 \Leftrightarrow 7(x+1) - 8(x-1) = 9 \Leftrightarrow -x + 15 = 9 \Leftrightarrow \boxed{x = 6}$$

Portanto, a solução real da equação é 6 que é um divisor de 12.

**Resposta: A**

**03.** A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é 0,25. Determine o valor de $\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2º grau e a > b, e assinale a opção correta.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ c) $-1$ d) $\sqrt{2}+\frac{1}{4}$ e) $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

**RESOLUÇÃO:**
Temos:

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{2} \\ ab=0,25=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(a+b)^2-4ab=(\sqrt{2})^2-4.\frac{1}{4}=1$$

$$a>b \Rightarrow a-b=1$$

$$\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a^3-ab^2-b^3-ab^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a(a^2-b^2)-b^2(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a(a-b)-b^2}{(a-b)}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)-ab}{(a-b)}=(a+b)-\frac{ab}{(a-b)}=\sqrt{2}-\frac{(1/4)}{1}=\sqrt{2}-\frac{1}{4}$$

**Resposta: E**

---

**04.** Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de $q^2+6q$ é sempre igual a

a) $\frac{p^2r^2+9}{4}$

b) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$

c) $p^2r^2-9$

d) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$

e) $p^2r^2-12p$

**RESOLUÇÃO:**

Note que $p.r=\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)(ab+ac+bc)$

$pr = 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$

$\Rightarrow pr=3+q \Leftrightarrow q=pr-3$

Como $q^2+6q=q(q+6)=(pr-3)(pr+3)=p^2r^2-9$

**Resposta: C**

**05.** A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3 - \sqrt{33x^3 + 97} = 5$ é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

**RESOLUÇÃO:**

Seja $3x^3 = y$, temos:

$y - \sqrt{11y + 97} = 5 \Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{11y + 97}$ (*)

*1ª Restrição:* $y - 5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 5$

*2ª Restrição:* $11y + 97 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{97}{11}$. Logo $y \geq 5$

(*) $(y - 5)^2 = 11y + 97$

$y^2 - 10y + 25 = 11y + 97$

$$y^2 - 21y - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 24 \\ \text{ou} \\ y = -3 \text{ (não é valida já que } y \geq 5) \end{cases}$$

$y = 3x^3 = 24 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, temos apenas uma solução real.

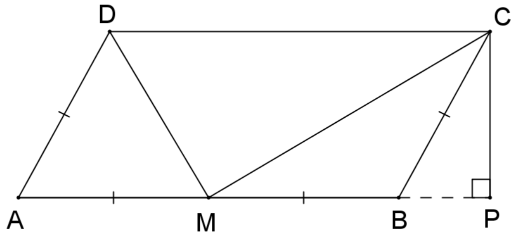
**Resposta: A**

---

**06.** Num paralelogramo ABCD de altura CP = 3, a razão $\dfrac{AB}{BC} = 2$. Seja 'M' o ponto médio de AB e 'P' o pé da altura de ABCD baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\dfrac{S(MPC)}{S(ADM)} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo PBC é igual a:

a) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**RESOLUÇÃO:**




$\dfrac{AB}{BC} = 2 \Leftrightarrow BC = \dfrac{AB}{2} = AM = MB$

Como os triângulos MPC e ADM possuem alturas de mesma medida, então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

$$\frac{S(MPC)}{S(ADM)}=\frac{MP}{AM}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{MB+BP}{AM}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{BP}{BC}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{BP}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C\hat{B}P=30^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{CP}{BP}=\text{tg}\left(C\hat{B}P\right)=\text{tg}\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{3}{BP}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow BP=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S(BPC)=\frac{BP\cdot PC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{unidades de área}$$

**Resposta: B**

---

**07.** O valor de $\sqrt{9^{0,5}X\,0,333...+\sqrt[7]{4\,X\sqrt{0,0625}}}-\frac{(3,444...+4,555...)}{\sqrt[3]{64}}$ é

a) $0$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}-2$ d) $\sqrt{2}-2$ e) $1$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sqrt{9^{0,5}\cdot 0,333...+\sqrt[7]{4\cdot\sqrt{0,0625}}}-\frac{3,444...+4,555...}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}+\sqrt[7]{4\cdot\frac{25}{100}}}-\frac{7,9999...}{4}$$

$$=\sqrt{1+\sqrt[7]{1}}-\frac{8}{4}=\sqrt{2}-2$$

**Resposta: D**

---

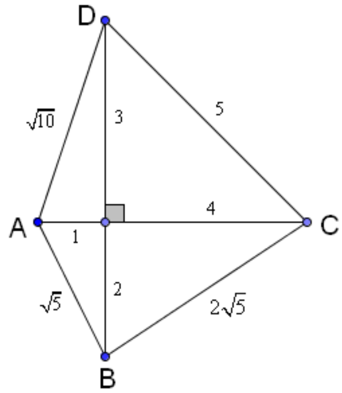
**08.** Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

I. Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.
II. Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.
III. Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

**RESOLUÇÃO:**
Sugerimos o quadrilátero ABCD abaixo.

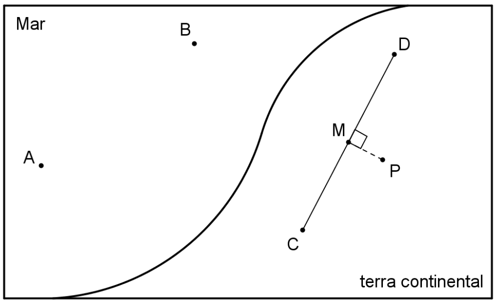


Notamos que ABCD é quadrilátero convexo e suas diagonais são perpendiculares, além disso, possui todos os lados diferentes, então teremos todas as alternativas falsas, já que:

**I.** **Falsa -** O quadrilátero ABCD sugerido não é quadrado.
**II.** **Falsa -** Este quadrilátero não é losango.
**III.** **Falsa -** Nenhuma das diagonais divide o quadrilátero em dois triângulos isósceles.

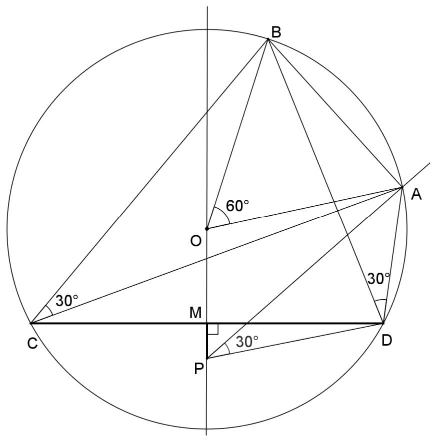
**Resposta: A questão não possui alternativa correta e deve ser anulada.**

**09.** Observe a figura a seguir




A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos 'A' e 'B' e os pontos 'C', 'D', 'M' e 'P' fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D} \sim B = A\hat{P}D = 30°$, 'M' é o ponto médio de CD = 100 m e que PM = 10 m perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as linhas é de:
a) 150 m b) 130 m c) 120 m d) 80 m e) 60 m

**RESOLUÇÃO:**




Como os pontos C e D vêem o segmento AB sob um ângulo de 30º, os pontos A, B, C e D são concíclicos e a medida de AB é igual ao raio do círculo.

Uma vez fixado o triângulo DPC, o centro do círculo é um ponto flutuante pertencente à mediatriz de CD, que é a reta suporte do segmento $PM$.

O ponto A pertence à interseção do círculo com uma reta que forma 30º com o segmento DP e o ponto B é determinado a partir de A tal que a distância AB seja igual ao raio.
Assim, como O é flutuante, o raio é variável e, consequentemente, a medida de $AB$ também é variável.
Logo, o problema não tem solução única.

**Resposta: A questão não possui alternativa correta e deve ser anulada.**

**10.** Numa pesquisa sobre leitores dos jornais A e B, constatou-se que 70% lêem o jornal A e 65% lêem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que lêem os jornais A e B?
a) 35% b) 50% c) 65% d) 80% e) 95%

**RESOLUÇÃO:**

***1ª Interpretação:***
Supondo que existem pessoas pesquisadas que não leem o jornal A e nem o Jornal B (o que contraria o enunciado), temos a seguinte solução:
Seja ***n*** o número de leitores do Jornal A **e** do Jornal B. Então:

- Leitores apenas do jornal A: (70% - ***n***)
- Leitores apenas do Jornal B: (65% - ***n***)
- Pesquisados que não leem A e nem B: x %

***n*** +(70% - ***n***) + (65% - ***n***) + x % = 100% $\Leftrightarrow$ ***n*** = 35 % + x % . Como x % é no máximo 30 % (na condição $B \subset A$ ) então o valor máximo de ***n*** é 65%.

***2ª Interpretação:***

Seguindo rigorosamente o descrito no enunciado *"numa pesquisa sobre os leitores dos jornais **A e B**"*, todos os entrevistados leem os jornais A e B, portanto não faria sentido dizer que apenas 70% leem o jornal A e 65% leem o jornal B. Nesta situação não haveria resposta correta.

***3ª Interpretação:***

Flexibilizando o enunciado para: *"numa pesquisa sobre os leitores dos jornais **A ou B**"*, poderíamos concluir que:
Se A é o conjunto de leitores do Jornal A, e B é o conjunto dos leitores de B, temos:

$$A \cup B = 100\%$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 70\% + 65\% - 100\% = 35\%$$

Neste caso não faria sentido perguntar sobre o percentual máximo.

Essas interpretações foram possíveis em virtude do erro no enunciado da questão proposta. Acreditamos que a solução esperada pelo examinador é a apresentada na primeira interpretação, e é provável que ele quisesse se referir a "uma pesquisa com leitores" e não "leitores dos jornais A e B". **Sendo assim, esta questão é passível de anulação**.

**Resposta: C (Passível de anulação)**

---

**11.** Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.

I. A condição a . b . c > 0 garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
II. Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que b > 0, é verdade que $-b < a < b$.
III. Admitindo que b > c, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

**RESOLUÇÃO:**
**I – VERDADEIRA**

$a \cdot b \cdot c > 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \wedge b^2 > 0 \wedge c^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Note que a condição inicial garante que nenhum dos três números é nulo, que é uma condição mais forte do que os três números não serem simultaneamente nulos.

**II – VERDADEIRA**

Pela definição de valor absoluto (módulo), temos se $b > 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.
Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

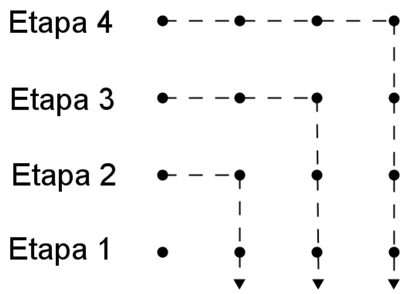
Se $a \geq 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow a < b$. Logo, $0 \leq a < b$.
Se $a < 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -a < b \Leftrightarrow -b < a$. Logo, $-b < a < 0$.
Fazendo a união dos dois intervalos temos o conjunto-solução da inequação $|a| < b$ que é $-b < a < b$.

**III - FALSA**

Basta considerar o contra-exemplo seguinte: $-1 > -2$ e $(-1)^2 = 1 < 2 = (-2)^2$.
A condição $b > c > 0 \Rightarrow b^2 > c^2$ seria verdadeira.

**Resposta: D**

**12.** Observe a figura abaixo




A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescenta-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que

a) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses 'n' primeiros ímpares é $n^2$.
b) a soma de todos os números naturais começando do 1 até 'n' é sempre um quadrado perfeito.
c) a soma dos pontos das 'n' primeiras etapas é $2n^2 - 1$.

d) cada etapa 'n' tem 3n – 2 pontos.
e) cada etapa 'n' tem 2n + 1 pontos.

**RESOLUÇÃO:**
Observamos que a quantidade de pontos que são acrescentados a cada etapa define a sequência: $E_1 = 1, E_2 = 3, E_3 = 5, \ldots, E_n = 2n - 1$, sua soma valerá:

$$\begin{array}{l} S_n = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_{n-1} + E_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) \\ \underline{S_n = E_n + E_{n-1} + \ldots + E_3 + E_2 + E_1 = (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 5 + 3 + 1} \\ 2S_n = 2n + 2n + 2n + \ldots + 2n + 2n \end{array}$$

$$S_n = \frac{2n \cdot (n)}{2} \Leftrightarrow S_n = n^2$$

Ou seja, cada etapa possui uma quantidade ímpar de pontos e a soma desses ´n´ primeiros ímpares é $n^2$.

Nas demais alternativas basta testar n = 2 e veremos que as afirmações são falsas.

**Resposta: A**

---

**13.** O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5 - \sqrt{3}$
b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
c) $3 - \sqrt{2}$
d) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$
e) 2

**RESOLUÇÃO:**
Observamos que:

Para resolver esse problema deve-se observar o produto notável:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Considerando a expressão:

$$\left(a - b\sqrt{3}\right)^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{3} + 3a\left(b\sqrt{3}\right)^2 - \left(b\sqrt{3}\right)^3 = \left(a^3 + 9ab^2\right) - 3\left(a^2b + b^3\right)\sqrt{3}.$$

Vamos então tentar identificar números positivos $a$ e $b$ tais que

$$26 - 15\sqrt{3} = \left(a^3 + 9ab^2\right) - 3\left(a^2b + b^3\right)\sqrt{3}.$$

$$26 = 8 + 18 = 2^3 + 9 \cdot 2 \cdot 1^2 \ \wedge \ 15 = 3\left(2^2 \cdot 1 + 1^3\right) \Rightarrow 26 - 15\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^3$$

Note que para identificar o valor de a testamos os cubos perfeitos menores que 26.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{3}\right)^3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

**Resposta: B**

**14.** A divisão do inteiro positivo 'N' por 5 tem quociente '$q_1$' e resto 1. a divisão de '$4q_1$' por 5 tem quociente '$q_3$ e resto 1. Finalmente, dividindo '$4q_3$' por 5, o quociente é '$q_4$' e o resto é 1. sabendo que 'N' pertence ao intervalo aberto (621, 1871), a soma dos algarismos do 'N' é

a) 18 b) 16 c) 15 d) 13 e) 12

**RESOLUÇÃO:**
Pelo Enunciado.

$$N = 5q_1 + 1 \quad (I)$$
$$4q_1 = 5q_2 + 1 \quad (II)$$
$$4q_2 = 5q_3 + 1 \quad (III)$$
$$4q_3 = 5q_4 + 1 \quad (IV)$$

Somando 4 em todas as equações:

$$N + 4 = 5(q_1 + 1) \quad (I')$$
$$4(q_1 + 1) = 5(q_2 + 1) \quad (II')$$
$$4(q_2 + 1) = 5(q_3 + 1) \quad (III')$$
$$4(q_3 + 1) = 5(q_4 + 1) \quad (IV')$$

Multiplicando membro a membro as equações.

$$4^3.(N + 4) = 5^4(q_4 + 1)$$

Como mdc(5,4) = 1, N+4 deve ser múltiplo de $5^4$. Logo existe um número inteiro K, tal que $N + 4 = 5^4K \Rightarrow N = 5^4K - 4$. Como $621 < N < 1871$, para K = 2, segue que $\boxed{N = 1246}$.

Portanto, a soma dos algarismos valerá 13.

**Resposta: D**

---

**15.** Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.

a) $\sqrt[6]{1771561}$
b) $\sqrt[4]{28561}$
c) $\sqrt[6]{4826807}$
d) $\sqrt[4]{331776}$
e) $\sqrt[6]{148035889}$

**RESOLUÇÃO:**
Vamos analisar o último algarismo dos quadrados perfeitos e dos cubos perfeitos.
As congruências abaixo são calculadas módulo 10.

$0^2 \equiv 0$; $1^2 \equiv 1$; $2^2 \equiv 4$; $3^2 \equiv 9$; $4^2 \equiv 6$; $5^2 \equiv 5$; $6^2 \equiv 6$; $7^2 \equiv 9$; $8^2 \equiv 4$; $9^2 \equiv 1$

Assim, o número 4826807 não é quadrado perfeito, logo $\sqrt[6]{4826807} \notin \mathbb{Z}$.

Também é possível solucionar o problema através da decomposição dos fatores:

a) $\sqrt[6]{1771561} = \sqrt[6]{11^6} = 11$

b) $\sqrt[4]{28561} = \sqrt[4]{13^4} = 13$

c) $\sqrt[6]{4826807} = \sqrt[6]{41.117727} \notin \mathbb{Z}$

d) $\sqrt[4]{331776} = \sqrt[4]{24^4} = 24$

e) $\sqrt[6]{148035889} = \sqrt[6]{26^6} = 26$

**Resposta: C**

**16.** A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:

a) 2 b) $\sqrt{2}-1$ c) $2-\sqrt{2}$ d) 1 e) 0

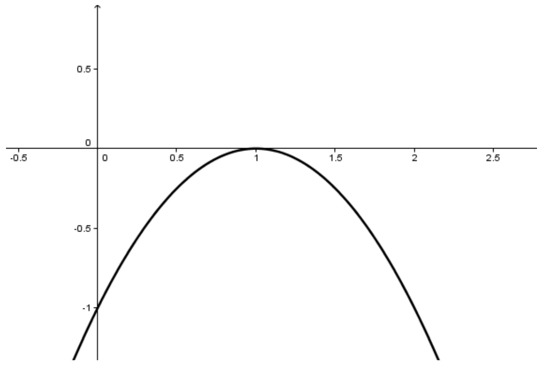
**RESOLUÇÃO:**

$\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$

$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)^2 \leq 0$

Logo, o valor máximo de $\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$ é 0 que ocorre quando x=1.

Essa conclusão também poderia ser obtida observando que o valor máximo da expressão é a ordenada do vértice da função quadrática $y = -(x-1)^2$ cujo vértice é $V(1,0)$.




**Resposta: E**

---

**17.** Sejam

$A = \left[7^{2011}, 11^{2011}\right]$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = (1-t) \,.\, 7^{2011} + t \,.\, 11^{2011} \text{com } t \in [0,1]\right\}$, o conjunto A – B é :

a) $A \cap B$

b) $B - \left\{11^{2011}\right\}$

c) $A - \left\{7^{2011}\right\}$

d) A

e) $\varnothing$

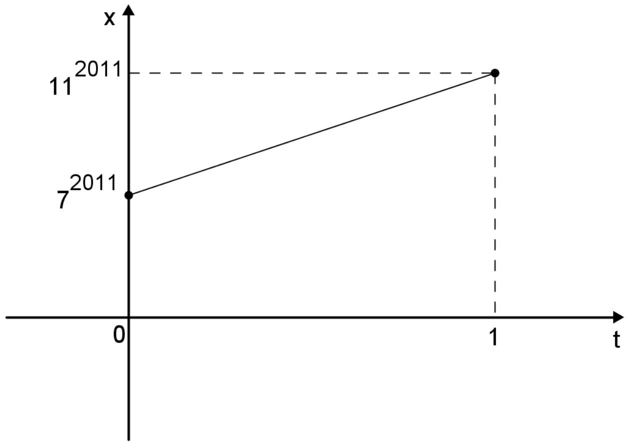
**RESOLUÇÃO:**

A expressão $x = (1-t)\cdot 7^{2011} + t\cdot 11^{2011}$ é uma função do primeiro grau em t que associa cada valor de t a um valor de x.

$$x = (1-t)\cdot 7^{2011} + t\cdot 11^{2011} = \left(11^{2011} - 7^{2011}\right)t + 7^{2011}$$

Como essa função do primeiro grau possui domínio $[0,1]$, sua imagem é $\left[7^{2011}, 11^{2011}\right]$, logo $B = \left[7^{2011}, 11^{2011}\right]$ e $A - B = \varnothing$.

Abaixo está apresentado o gráfico que representa essa função. Observe que esse gráfico é um segmento de reta que liga o ponto $\left(0, 7^{2011}\right)$ ao ponto $\left(1, 11^{2011}\right)$.




Note ainda que a expressão utilizada no enunciado é uma expressão conhecida para representação dos elementos de um intervalo real qualquer a partir do intervalo

$$[0,1]:[a,b]=\{x\mid x=a\cdot(1-t)+b\cdot t,\ t\in[0,1]\}.$$

**Resposta: E**

---

**18.** Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de 'N' e 'n' lados ($N \neq n$), e com 'D' e 'd' diagonais, respectivamente, de modo que N–n=D–d. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) indeterminada.

**RESOLUÇÃO:**

A partir da equação: N – n = D – d obtemos:

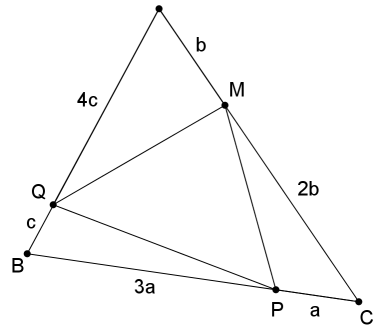
$$N-n=\frac{N(N-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow 2N-2n=N^2-3N-n^2+3n$$
$$\Leftrightarrow N^2-n^2=5N-5n \Leftrightarrow (N-n)(N+n)=5(N-n),\text{ como } N\neq n$$
$$\Leftrightarrow N+n=5$$

N e n são gêneros de polígonos, $N\geq 3\ e\ n\geq 3$, portanto $N+n\geq 6$.
Logo, não há solução para $N+n=5$.

**Resposta: A**

---

**19.** Considere a figura abaixo.



A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é:

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{7}{8}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\frac{S(AMQ)}{S(ABC)} = \frac{b \cdot 4c}{3b \cdot 5c} = \frac{4}{15}, \quad \frac{S(BPQ)}{S(ABC)} = \frac{c \cdot 3a}{5c \cdot 4a} = \frac{3}{20}, \quad \frac{S(CMP)}{S(ABC)} = \frac{a \cdot 2b}{4a \cdot 3b} = \frac{1}{6}$$

Denominando S(ABC) = S e S(MPQ)=S′ temos:

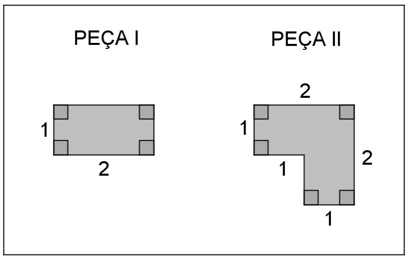
$$S(AMQ) + S(BPQ) + S(CMP) + S(MPQ) = S(ABC)$$

$$\frac{4S}{15} + \frac{3S}{20} + \frac{S}{6} + S' = S \Leftrightarrow \frac{16S + 9S + 10S}{60} + S' = S \Leftrightarrow S' = S - \frac{35S}{60} = \frac{25S}{60} = \frac{5S}{12} \Leftrightarrow \boxed{\frac{S'}{S} = \frac{5}{12}}$$

**Resposta: B**

---

**20.** Observe a ilustração a seguir.




Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadro de lado 5, utilizando as peças acima?

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

**RESOLUÇÃO:**

A peça I possui área $S_1 = 1 \cdot 2 = 2$ e a peça II possui área $S_2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

Um quadrado de lado $5$ possui área $5^2 = 25$.

Supondo que sejam utilizadas $x$ peças do tipo I e $y$ peças do tipo II para revestir o quadrado, então $2 \cdot x + 3 \cdot y = 25$.

Para encontrar a quantidade mínima de peças, devemos obter o valor mínimo de $x + y$.

Como $\text{mdc}(2,3) = 1$, a equação acima pode ser resolvida como segue:

$$2x + 3y = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

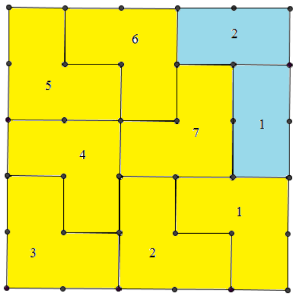
Mas, como $x$ e $y$ são as quantidades de peças, ambos devem ser não negativos.

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\dfrac{2}{3} \\ y = 7 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{7}{2}$$

$t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{0,1,2,3\}$

Como $x + y = (2+3t) + (7-2t) = 9 + t$ e $t \in \{0,1,2,3\}$, então o valor mínimo procurado é $(x+y)_{MIN} = 9 + 0 = 9$ que ocorre quando $t = 0$. Neste caso, $x = 2$ e $y = 7$.

A figura a seguir ilustra o caso encontrado acima




**Resposta: D**