GABARITO – PROVA AMARELA

MATEMÁTICA

01	A	**11**	A
02	E	**12**	C
03	Anulada	**13**	Anulada
04	A	**14**	B
05	B	**15**	C
06	D	**16**	A
07	D	**17**	E
08	A	**18**	C
09	E	**19**	C
10	C	**20**	C

GABARITO COMENTADO – PROVA AMARELA

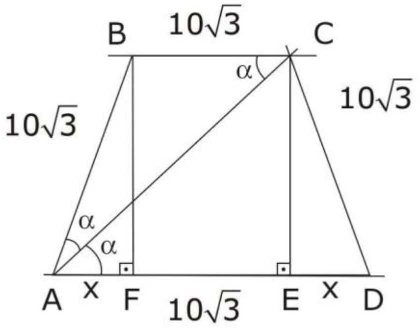
01.
RESOLUÇÃO:
Utilizando que $(-1)^{2k}=1$ e $(-1)^{2k+1}=-1$
Temos que a expressão é igual a 1-1-1-1-1-1=-4.

Resposta: A

02.
RESOLUÇÃO:
I) 9,12341234...<9,12344444... F
II) $1-\frac{2}{22222}=1-\frac{5}{55555}<1-\frac{2}{22223}$ V
III) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}=0{,}666...$ F
IV) $2^3=64^{0,5}=8$ V
Apenas II e IV são verdadeiras.

Resposta E

03.
RESOLUÇÃO:



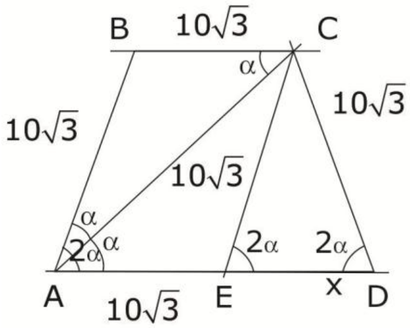
Da figura acima temos que : $C\hat{A}D \equiv C\hat{A}B = \alpha$ (Alternos internos)
Assim ΔABC isósceles $\Rightarrow AB = BC = 10\sqrt{3}$

Assim, no ΔDEC $\begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{x}{10\sqrt{3}} \Rightarrow x = 10\sqrt{3}\cos 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{h}{10\sqrt{3}} \Rightarrow h = 10\sqrt{3}\operatorname{sen} 2\alpha \end{cases}$

Então: $A = \dfrac{(10\sqrt{3}+10\sqrt{3}+20\sqrt{3}\cos 2\alpha)10\sqrt{3}\operatorname{sen}2\alpha}{2} \Rightarrow A = 300(1+\cos 2\alpha)\operatorname{sen}2\alpha$

Assim a área será função do ângulo da base, sendo variável. No caso de $\alpha = 30° \Rightarrow A = 300.\left(1+\frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 225\sqrt{3}.$

Justificativa Geométrica



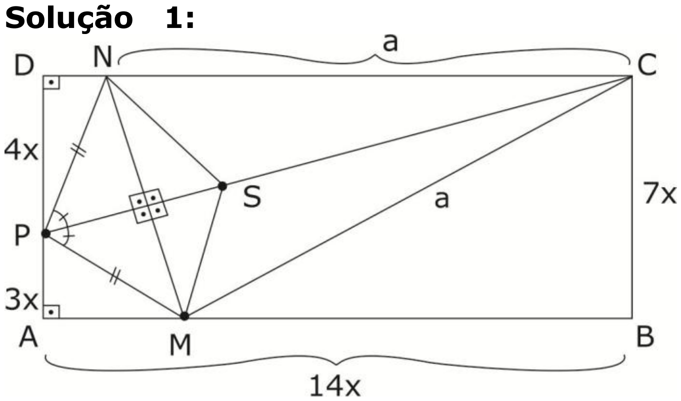
Tome o losango ABCE de lado $10\sqrt{3}$ e ângulo $B\hat{A}E = 2\alpha$ variável. Por ser losango, a bissetriz AC é diagonal.
Traçando $CD = 10\sqrt{3}$, note que ΔCED é isóceles, assim $C\hat{D}A = 2\alpha$ e $CD = AB = 10\sqrt{3}$.
Assim o trapézio ABCD é isóceles, de laterais medindo $10\sqrt{3}$, diagonal da base maior contem um dos vértices, contudo possui ângulo da base variável. Como descrito acima sua área será variável.

Resposta: Anulada

04.
RESOLUÇÃO:
Temos que $(21)^{2012} = (3.7)^{2012} \Rightarrow 21^{2012} = 3^{2012}.7^{2012}$
Assim teremos 2012 zeros ao escrever 21 na base 7.

Resposta: A

05.
RESOLUÇÃO:
Solução 1:



Definiu-se por $CN = a$, $PN = NS = MS = MP = l$. Assim $BN = 14x - a$.
Note que $\Delta CNP \equiv \Delta CPM(LAL)$, assim $CM = a$.
Por Pitágoras obtem-se que $MD = \sqrt{a^2 - 49x^2} \Rightarrow AM = 14x - \sqrt{a^2 - 49x^2}$

No ΔMAP : $l^2 = 9x^2 + \left(14x - \sqrt{a^2 - 49x^2}\right)^2$
ΔNBP : $l^2 = 16x^2 + (14x - a)^2$

Assim:

$$9x^2 + \left(14x - \sqrt{a^2 - 49x^2}\right)^2 = 16x^2 + (14x - a)^2 \Rightarrow 56x^2 - 28ax = -28x\sqrt{a^2 - 49x^2} \Rightarrow a - 2x = \sqrt{a^2 - 49x^2}$$

$a^2 - 4ax + 4x^2 = a^2 - 49x^2 \Rightarrow 4ax = 53x^2 \Rightarrow a = \frac{53x}{4}$ Assim , $BN = 14x - \frac{53x}{4} \Rightarrow BN = \frac{3x}{4}$.

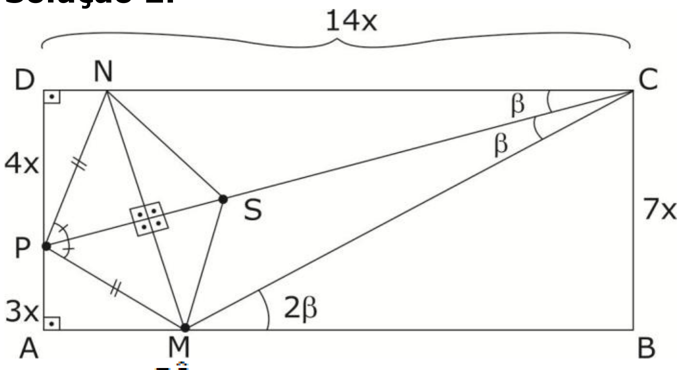
Como no ΔNBP $l^2 = 16x^2 + (14x - a)^2 \Rightarrow l^2 = \frac{265x^2}{16}$

No ΔMAP $l^2 = 9x^2 + (AM)^2 \Rightarrow AM = \frac{11x}{4}$

Assim $\frac{BN}{AM} = \frac{\frac{3x}{4}}{\frac{11x}{4}} = \frac{3}{11}$

Resposta: B

Solução 2:



Definindo $B\hat{C}P = \beta$.

Note que $\Delta CNP \equiv \Delta CPM(LAL)$. Assim $P\hat{C}M = \beta \Rightarrow C\widehat{M}D = 2\beta$

No $\Delta CBP \Rightarrow tg\,\beta = \frac{4x}{14x} = \frac{2}{7}$ Assim $tg2\beta = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} \Rightarrow tg2\beta = \frac{28}{45}$

No ΔCMD $\Rightarrow tg2\beta = \frac{CD}{MD} \Rightarrow MD = \frac{45}{4}x \Rightarrow AM = \frac{11x}{4}$

ΔMAP $l^2 = 9x^2 + (AM)^2 \Rightarrow l^2 = \frac{265x^2}{16}$

ΔNBP $l^2 = 16x^2 + BN^2 \Rightarrow BN^2 = \frac{3x}{4}$ Assim, teremos : $\frac{BN}{AM} = \frac{\frac{3x}{4}}{\frac{11x}{4}} = \frac{3}{11}$

Resposta: B

06.
RESOLUÇÃO:

Para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja inteiro, então devemos ter 17 fatores 7 no inteiro N.
Como $N = 1.2.3.4 \cdots (k-1)k$, então deve-se determinar um k abaixo do qual tenhamos 17 fatores 7.
Como os fatores 7 advem dos múltiplos de 7, então devemos determinar abaixo de qual múltiplo teremos fatores 7
suficientes.
Lembrando que $7^2 = 49$, $2.7^2 = 98$ geram mais de um fator 7 cada, logo
$k = 7.17 = 119$ Fatores 7 : 17+ 2=19
$k = 7.15 = 105$ Fatores 7 : 15+2=17, Contudo como k ‵e impar e não multiplo de 7, logo k=107.

Resposta: D

07.
RESOLUÇÃO:
Tem-se que $2160 = 2^4.3^3.5$ e $1680 = 2^4.3.5.7$ Então:
$2160x + 1680y = 2^4.3^3.5x + 2^4.3.5.7y \Rightarrow 2160x + 1680y = 2^4.3.5(9x + 7y)$
Logo $2160x + 1680y = 240(9x + 7y)$. Assim, devemos ter $(9x + 7y)$ minimo.
Verificaremos se a equação diofantina $9x + 7y = 1$ possui solução inteira.
Como $\text{mdc}(9.7) = 1$ logo a equação possui solução inteira.
Encontrando a solução :
Sendo $7y \equiv 0 \bmod 7$ e $9x \equiv 2x \bmod 7$ $\Rightarrow$ $9x + 7y \equiv 2x \bmod 7$.
Como $1 \equiv -6 \bmod 7$, sendo $9x + 7y = 1$ entao
$2x \equiv -6 \bmod 7 \Rightarrow 2x = -6 + 7k \Rightarrow x = -3 + \frac{7k}{2}, \text{com } k \epsilon \mathbb{Z}$
Assim para $k = 0 \Rightarrow x = -3$ e $y = 4$.
Logo Valor mínimo: 240
Letra D

Resposta: D

08.
RESOLUÇÃO:
Como N possui no total 70 divisores, temos então 35 divisores positivos .

Seja $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, então $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = 35$

Sendo $35 = 5.7 \Rightarrow (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 5.7 \Rightarrow \alpha_1 = 4$ e $\alpha_2 = 6$ ou $\alpha_1 = 6$ e $\alpha_2 = 4$

Assim $N = p_1^4 p_2^6$ ou $N = p_1^6 p_2^4$.

Como deseja-se o menor valor de $|N + 3172|$ logo, $N < 0$ e $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$

Assim , temos os casos

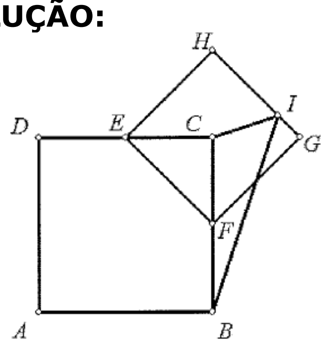
1) $p\_1 = 2$ e $p\_2 = 3$ i) $N = -2^4.3^6 = -11664 \Rightarrow |N + 3172| = 8462$

ii) $N = -2^6.3^4 = -5184 \Rightarrow |N + 3172| = 2012$ -Menor valor

Note que $\forall\ p_1 > 2$ e $p_2 > 3$ teremos maiores módulos de N, aumentando o valor de $|N + 3172|$

Resposta: A

09.
RESOLUÇÃO:



$CE=CF=1 \Rightarrow CG=1$ e $GH=\sqrt{2}$ $GI=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Seja M o ponto médio de GH, $IM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e $CM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

aplicando pitágoras no triângulo CMI temos $CI=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

aplicando lei dos cossenos no triângulo CIG

$GI^2 = CI^2 + CG^2 - 2 \cdot CI \cdot CG \cos\alpha$; onde $\alpha = \angle ICG$

daí $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow (BCI) = CB \cdot CI.sen(90^0 + \alpha) \cdot \dfrac{1}{2}$

$(BCI) = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{4} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Resposta: E

10.
RESOLUÇÃO:
Tirando o M.M.C das frações algébricas e reescrevendo

temos $\frac{x^2-3}{x^2+x-3}\cdot\frac{2x}{x^2-3}=1\Rightarrow\frac{2x}{x^2+x-3}=1\Rightarrow x^2-x-3=0$

logo a soma das raízes reais é igual a 1.

Resposta: C

11.
RESOLUÇÃO:

Seja $h_1=2k_1+1$ e $h_2=2k_2+1\Rightarrow$ as bases são $2h_1$ e $2h_2\Rightarrow$

$(T_1)+(T_2)=(2k_1+1)^2\cdot(2k_2+1)^2=4n+2$ com n natural.

Como nenhum quadrado perfeito é da forma 4n+2

e o lado do quadrado é um quadrado perfeito, não há solução

S=∅.

Resposta: A

12.
RESOLUÇÃO:
São 6 números: 0, 27, 56, 87, 120 e 155.

$0=26\cdot0+0$

$27=26\cdot1+1$

$56=26\cdot2+4$

$87=26\cdot3+9$

$120=26\cdot4+16$

$155=26\cdot5+25$

Resposta: C

13.
RESOLUÇÃO:
Seja x a quantidade do ingrediente A e y a quantidade do ingrediente B. Considerando a proporcionalidade de 10 kg de A para cada 100 kg de B, podemos escrever y = 10x. Além disso, x + y = 44 kg, ou seja, devemos ter x = 4 kg de A e y = 40 kg de B. Desta forma, nenhuma alternativa satisfaz aos resultados encontrados.

Resposta: Anulada

14.
RESOLUÇÃO:
Vejamos o seguinte: $x^{2012} = x^{2012} + 1 - 1 = \left(x^4\right)^{503} + 1 - 1$. Desta forma temos,

$\left(x^4\right)^{503} + 1 = \left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \left(x^4\right)^{500} - ... + 1\right]$ e portanto,

$p(x) = 2\left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \left(x^4\right)^{500} - ... + 1\right] - 2 + 2012x + 2013$, o que nos dá o resto $r(x) = 2012x + 2011$ e assim $r(-1) = -1$.

Resposta: B

15.
RESOLUÇÃO:
Analisemos um caso por vez.
1º) $d = 21$. Neste caso, fazendo o algoritmo da divisão temos, q = 25 e r = 17. O que nos dá r + d = 38 ou r + q = 112.
2º) q = 21. Neste caso, temos que $92 \le d \le 95$. Vejamos cada caso separadamente,

- $d = 92 \Rightarrow r = 80 \Rightarrow d + r = 172$ e $r + q = 101$;
- $d = 93 \Rightarrow r = 59 \Rightarrow d + r = 152$ e $r + q = 80$;
- $d = 94 \Rightarrow r = 38 \Rightarrow d + r = 132$ e $r + q = 59$;
- $d = 95 \Rightarrow r = 17 \Rightarrow d + r = 112$ e $r + q = 38$.

Desta forma, a alternativa correta é aquela que corresponde a $d + r = 152$.

Resposta: C

16.
RESOLUÇÃO:
$a^3b + 4ab^3 - 3a^2 - 12b^2 = 287 \Rightarrow ab(a^2 + 4b^2) - 3(a^2 + 4b^2) = 287$

$(ab - 3)(a^2 + 4b^2) = 287 = 7.41$ (*).

De acordo com o enunciado, $ab > 3$, ou seja, ambos os fatores da igualdade (*) devem ser números naturais positivos. Além disso, pela desigualdade das médias, temos que $a^2 + 4b^2 \ge 2\sqrt{a^2.4b^2} = 4ab$. Usando novamente que $ab > 3$ temos que $a^2 + 4b^2 > 12$. Portanto, a partir da igualdade (*), podemos concluir que,

$$\begin{cases} ab - 3 = 7 \Rightarrow b = 10/a \\ a^2 + 4b^2 = 41 \end{cases}.$$

Substituindo a primeira equação na segunda temos,

$a^2 + \frac{400}{a^2} = 41 \Leftrightarrow a^4 - 41a^2 + 400$. Resolvendo a equação biquadrada encontramos como solução $a = 4$ ou $a = 5$. Desta forma, temos os pares de soluções $a = 4$ e $b = 2,5$ ou então $a = 5$ e $b = 2$. Sendo assim, a maior soma $a + b$ será igual a 7.

Resposta: A

17.
RESOLUÇÃO:

Sendo $A=\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}} \Rightarrow A=\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}} \Rightarrow A=\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Então: $A=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3} \Rightarrow A=\sqrt{3}$ Logo $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}=\frac{A^2}{A\sqrt[6]{A}}=\frac{A}{\sqrt[6]{A}}$

Assim $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}=A^{5/6}=\sqrt[12]{3^5}$.

Resposta: E

18.
RESOLUÇÃO:

$\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$ e como $2012=6\times 335+2$ teremos 335 períodos cuja soma dos algarismos de cada um deles é igual a 27 mais dois algarismos a saber, o 7 e o 1 totalizando 9.053 cujo resto da divisão por 23 é igual a 14.

Resposta: C

19.
RESOLUÇÃO:

Note que $n^4+n+1=n(n^3+1)+1 \Rightarrow n^4+n+1=n(n+1)(n^2-n+1)+1$
Como $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ será par, logo n^4+n+1 será sempre ímpar. Assim
: $(-1)^{n^4+n+1}=(-1)$

De acordo com a definição de $x\#y$, temos

$$\left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)=\left(\frac{2\#(2\#(4))}{((4)\#2)\#2}\right)=\left(\frac{2\#(16)}{(16)\#2}\right)=\frac{2^{16}}{16^2}=\frac{2^{16}}{2^8}=2^8=256$$

Logo,

$$(-1)^{n^4+n+1}+\left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)=255$$

Resposta: C

20.
RESOLUÇÃO:
Seja $S = x + y + z + t$, temos:
$S \equiv 4\ (mod\, 5)$, Logo:
$S = 5l + 4\ com\ l \in \mathbb{Z}\ (I)$
Temos ainda que
$S \equiv 11\ (mod\, 12) \Leftrightarrow$
$5l + 4 \equiv 11\ (mod\ 12) \Leftrightarrow$
$5l \equiv 7\ (mod\, 12)$, Multiplicando por 5
$l \equiv 11\ (mod\, 12)$, Donde
$l = 12r + 11, em\ (I)$
$S = 60r + 59, com\ r\ \in \mathbb{Z} \quad (II)$, ou seja, S deixa resto 59 na divisão por 60.
Marcando os ângulos na figura temos a seguinte relação.
$360º + 5k = x + y + z + t$,Logo
$$k = \frac{S - 360º}{5}$$
Como $36º < k$
$$\frac{S - 360º}{5} > 36$$
$S > 540$, juntamente com a condição (II), temos que o menor inteiro que deixa resto 59 na divisão por 60 e é maior que 540 é 599.
Obs: Note que $k\ \notin\ \mathbb{Z}$, $\quad (k = 47{,}8)$

Resposta: C