COMENTÁRIO DA PROVA

01. Sendo $P = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{11}) \Rightarrow P = \frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7}.\frac{10}{9}.\frac{12}{11}$,

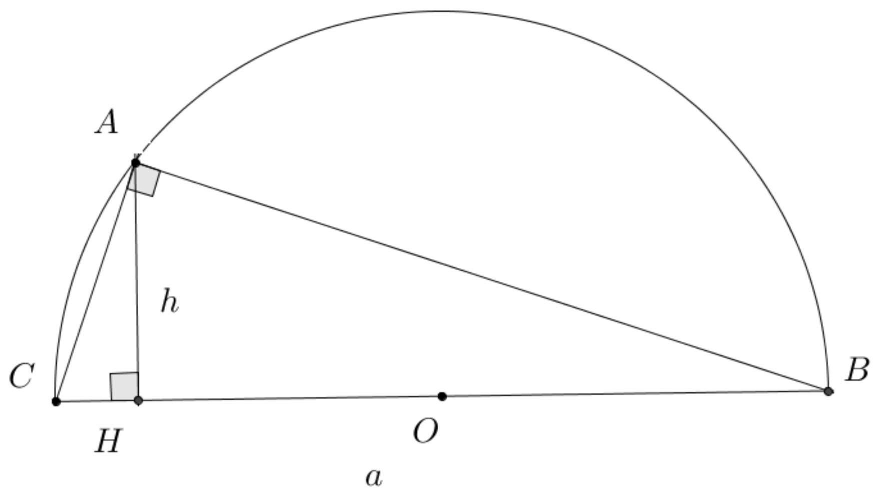
e $Q = (1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{11}) \Rightarrow Q = \frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{11}$

Assim $\frac{P}{Q} = \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}.\frac{5.7.9.11}{4.6.8.10} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{P}{Q} = 4$

Então $\sqrt{\frac{P}{Q}} = 2$

Letra: B

02.
1ª Solução

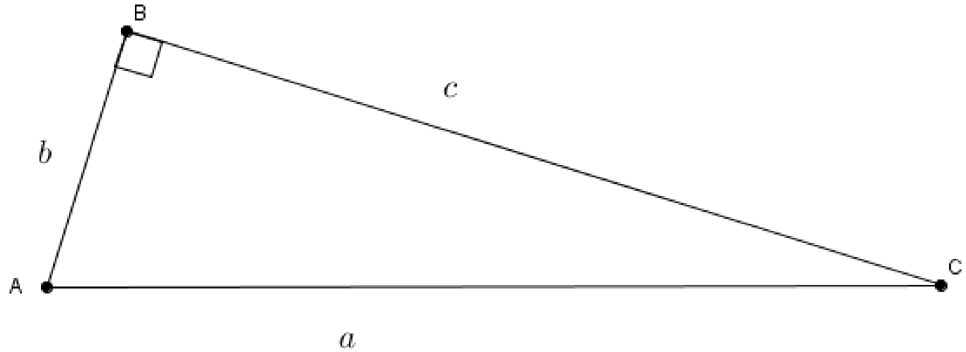


No triângulo acima:

$A = \frac{a.h}{2}$ Contudo $h \le R = \frac{a}{2}$ .Assim $h_{max} = \frac{a}{2}$, então $A_{max} = \frac{a^2}{4}$

2º Solução

Dado o triângulo retângulo abaixo



Sabe-se que: $A = \dfrac{b.c}{2}$, Contudo pela desigualdade das médias

$\dfrac{b+c}{2} \geq \sqrt{b.c} \Rightarrow \sqrt{b.c} \leq \dfrac{b+c}{2}$. Com igualdade ocorrendo se e somente se $b = c$

Assim $\sqrt{2A} \leq \dfrac{b+c}{2}$, logo a área máxima ocorre na igualdade.

$$\sqrt{2A_{max}} = \frac{b+b}{2} \Rightarrow \sqrt{2A_{max}} = b \Rightarrow A_{max} = \frac{b^2}{2}.$$

Como $b = c$ e $a^2 = b^2 + c^2$ então $a^2 = 2b^2$ e $A_{max} = \dfrac{b^2}{4}$

Letra: B

03.

Conjunto dos meninos: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Conjunto das meninas: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Vamos analisar as possibilidades a variando a idade dos meninos:

Meninos	Meninas	Totais de casais até 8 anos
1	1,2,3,4,5,6	6
2	1,2,3,4,5	5
3	1,2,3,4	4
4	1,2,3	3
5	1,2	2
6	1	1

Assim no total teremos: 6+5+4+3+2+1= 21 casais.

Letra: D

---

04. Temos que $A \cup B = \{3, 5, 8, 9, 10, 12\}$ *e* $B \cap C_X^A = \{10, 12\}$

$$B \cap C_X^A = \{10,12\} \Rightarrow \begin{cases} \{10,12\} \subset B \\ \{10,12\} \subset C_X^A \end{cases}$$

$C_X^A = X - A = \{10, 12\}$

Logo

$\{10,12\} \not\subset A$ *e* $\{10,12\} \subset B$

Como $B \subset X$ *e* $A \subset X$, $\{3, 5, 8, 9\}$ *podem ser elementos de* B.

Logo $n(B)_{MÁXIMO} = 6$

Letra: B

05. Temos que:

$(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0 \Rightarrow (4x^2+4x+1)(x^2+x-6)+6=0$

$(4(x^2+x)+1)((x^2+x)-6)+6=0$

Fazendo $x^2+x=y$, temos que:

$(4y+1)(y-6)+6=0 \Rightarrow 4y^2-24y+y-6+6=0$

$Logo\ 4y^2-23y=0 \Rightarrow y=0\ \ ou\ \ y=23\ /\ 4$

Assim: $x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\ ou\ x=-1$

$x^2+x=23\ /\ 4 \Rightarrow 4x^2+4x-23=0$

Ou: $\Delta=16+16.23 \Rightarrow \Delta=16.24 \Rightarrow \Delta=64.6$

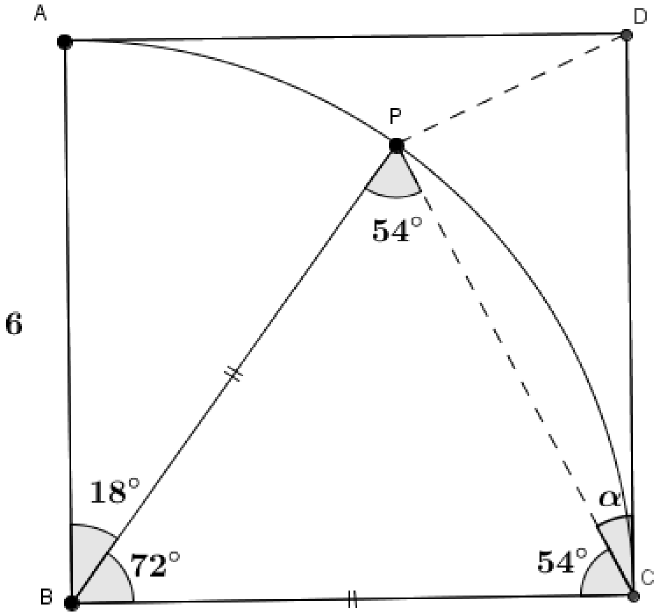
$x=\sqrt{6}-1\ /\ 2\ \ ou\ \ x=-\sqrt{6}-1\ /\ 2$

Duas maiores raízes: $x=0\ e\ \sqrt{6}-1\ /\ 2.$

$Soma:\sqrt{6}-1\ /\ 2$

Letra: Anulada

06. Da figura abaixo temos que.



Temos que:

$Arco\ \widehat{AP}\ (Em\ graus)$

$2\pi.6----360^\circ$

$3\pi\ /\ 5----\widehat{AP} \quad \Rightarrow \widehat{AP}=18^\circ \Rightarrow A\hat{B}P=18^\circ(\hat{A}ngulo\ central)$

$Assim\ P\hat{B}C=90^\circ-18^\circ=72^\circ.$

$Como\ \Delta ABC\ é\ isósceles,então$

$B\hat{P}C=B\hat{C}P=54^\circ$

Da figura acima $\alpha+54^\circ=90^\circ \Rightarrow \alpha=36^\circ$

Letra: A

07. Calculando

$$\left[(3^{0,333..})^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - (\sqrt[3]{3})^{3^3} \right]^{\sqrt[7]{92}} \Rightarrow$$

$$\left[(3^{1/3})^{27} + 2^{2} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{64}} - (3^{1/3})^{27} \right]^{\sqrt[7]{92}} \Rightarrow$$

$$\left[4 - \sqrt[5]{243} \right]^{\sqrt[7]{92}} = \left[4 - 3 \right]^{\sqrt[7]{92}} = 1$$

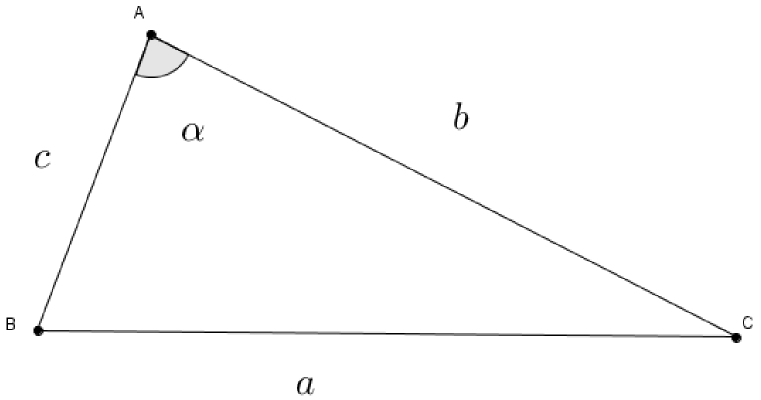
Letra: C

08.

$I - Verdadeiro - Teorema\,de\,Pitágoras$

$II - Verdadeiro - \text{Re}\,cíproca\,de\,Pitágoras$

Prova:

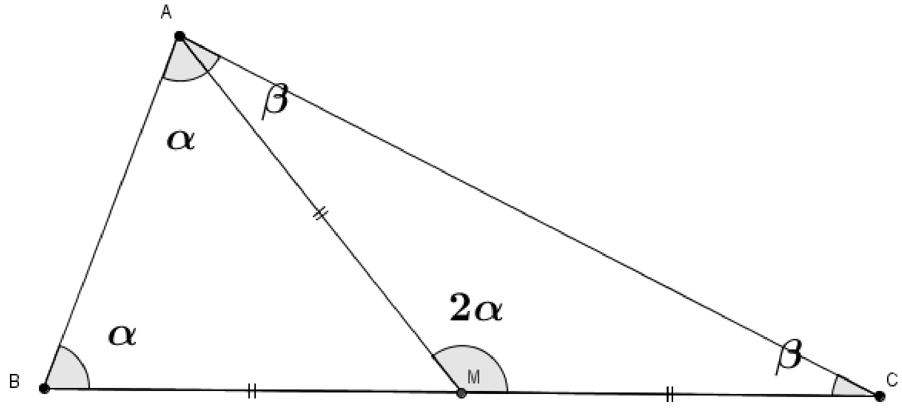


$Pela\,lei\,dos\,\cos senos$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\alpha,\ como\ a^2 = b^2 + c^2, então$

$-2b.c.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$III - Verdadeiro$



$\Delta ABM\ Isósceles \Rightarrow M\hat{A}B = M\hat{B}A = \alpha$

$Logo\ A\hat{M}C = 2\alpha$

$\Delta AMC\ Isósceles \Rightarrow M\hat{A}C = M\hat{C}A = \beta$

$\Delta AMC: 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

$IV)$ *Falso*

1ª *Solução*

$$Em\ qualquer\ triângulo\ d_{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}\ (Distância\ incentro\ e\ circuncentro)$$

$$Como\ d_{OI} > 0 \Rightarrow R^2 - 2Rr > 0 \Rightarrow R / r > 2 \Rightarrow r < R / 2$$

$$Triângulo\ retângulo\ R = a / 2 \Rightarrow r < a / 4$$

$$Como\ r = 3a / 4 \Rightarrow Absurdo$$

Letra: D

09.

$$\frac{-3}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 4}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = -3$$

$$Logo\ \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$S = \{\varnothing\}$$

Letra: E

10. Temos que

$ab = 1$ e

$$k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} \Rightarrow k = 2^{(a+b)^2 - (a-b)^2} \Rightarrow k = 2^{4ab} \Rightarrow k = (2^4)^5 = 16^5$$

Como: $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$, então

$(x + y)(x - y) = 16$

$$Como\ x, y \in \mathbb{N}\ então\ x + y > x - y,\ e\ \ x > y$$

$$Logo \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad x = 5\ e\ y = 3$$

$$ou \begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad x = 17 / 2\ e\ y = 15 / 2 (Absurdo, x, y \in \mathbb{N})$$

$$Logo\ y^x - x^y = 3^5 - 5^3 = 243 - 118 = 118$$

Algarismo das unidades 8.

Letra: E

11. $N^o\ de\ algarismos (10\ \ a\ \ 99) = (99 - 10 + 1).2 = 180\ algarismos$

Para somar todos os algarismos basta identificar quantas vezes cada um aparece nos números de 10 a 99.

Note que cada algarismo aparece 10 vezes na sua respectiva dezena (Algarismo 1: 10,11,12,12....19) e mais nove vezes figurando nas unidades(11,21, 31,41,51,.......91).

Assim

$$Soma\ dos\ algarismos = 10(1 + 2 + 3 + 4 \cdots 9) + 9(1 + 2 + 3 + 4 \cdots 9) \Rightarrow$$

$$Soma\ dos\ algarismos = 19.45$$

Logo

$$k = \frac{19.45}{180} \Rightarrow k = \frac{19}{4} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{4}{19}$$

Dízima periódica simples

Letra: C

12.

$Equação\ ax^2 + bx + c = 0,\ 1\,é\ raiz, logo\ a + b + c = 0.$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 5a \end{cases} \Rightarrow b = 2a\ e\ c = -3a.$$

$$Logo: b^c = (2a)^{-3a} \Rightarrow b^c = \frac{1}{(2a)^{3a}}$$

Letra: D

13. Os pontos M, N e P estarão alinhados.

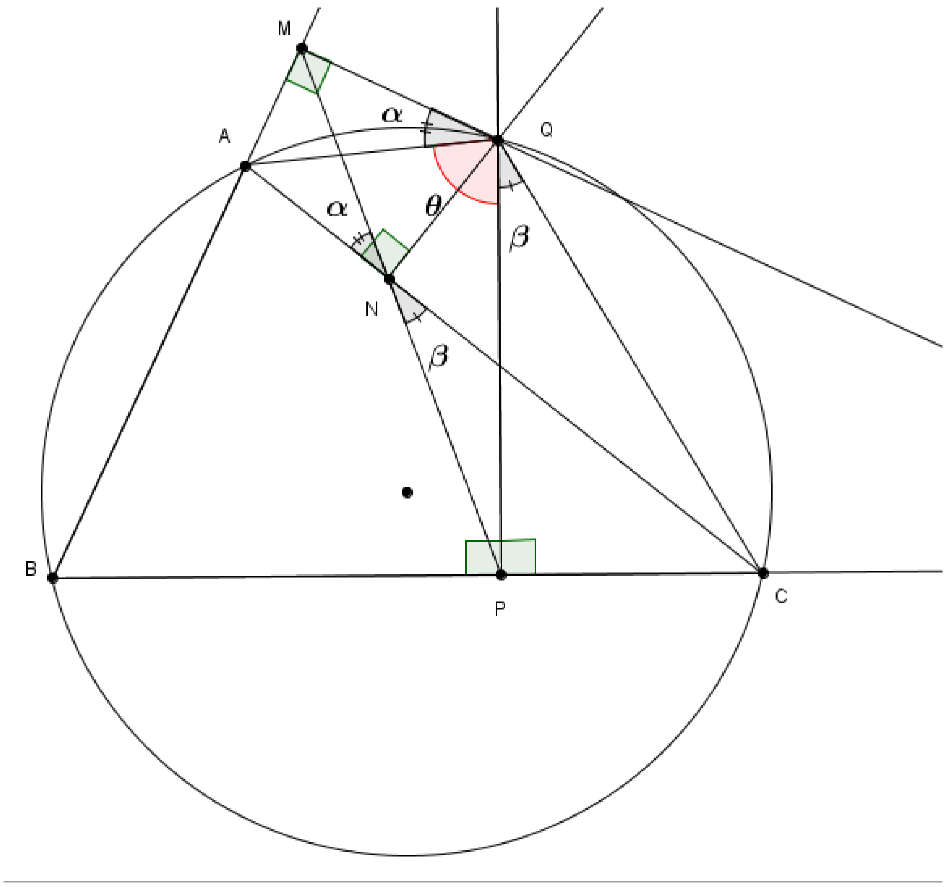
Demonstração:

$Defini - se\ A\hat{N}M = \alpha\ ,\ P\hat{N}C = \beta\ e\ A\hat{Q}P = \theta.$

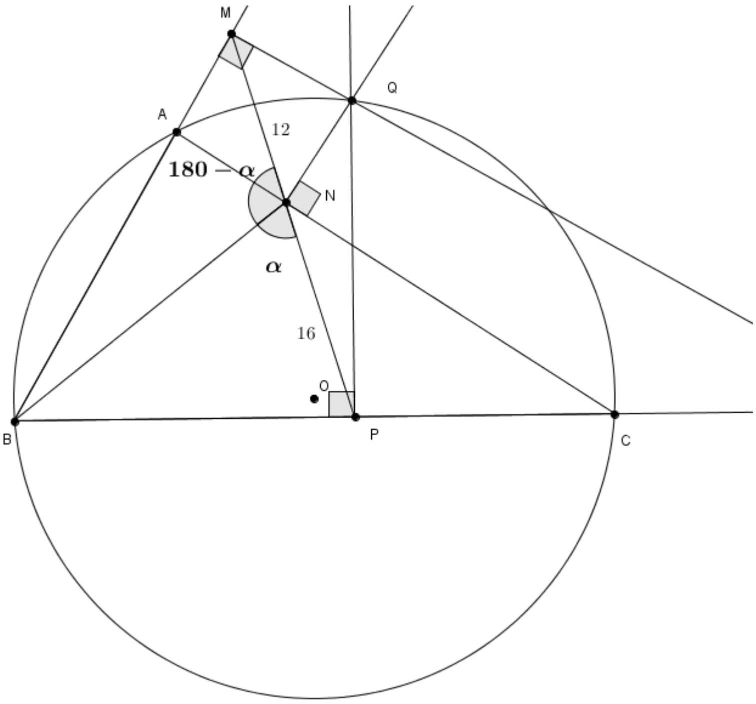
$Como\ \square AMQN\ e\ \square NPCQ\ são\ inscritíveis \Rightarrow A\hat{Q}M = \alpha, C\hat{Q}P = \beta$

$Como\ \square BMQP\ e\ \square BAQC\ são\ inscritíveis$

$$\begin{cases} \alpha + \theta = 180 - B \\ \beta + \theta = 180 - B \end{cases} \Rightarrow \alpha + \theta = \beta + \theta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow M, N, P\ alinhados$$

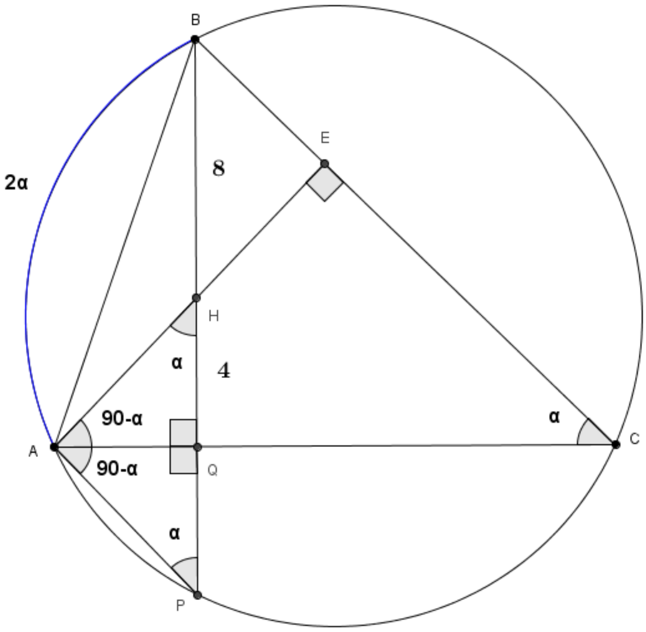


Assim $\frac{A_{BMN}}{A_{BNP}} = \frac{12.BN.sen(180-\alpha)}{16.BN.sen(\alpha)} \Rightarrow \frac{A_{BMN}}{A_{BNP}} = \frac{12}{16} \Rightarrow \frac{A_{BMN}}{A_{BNP}} = \frac{3}{4}$



Letra: A

14.



Na figura acima temos que:

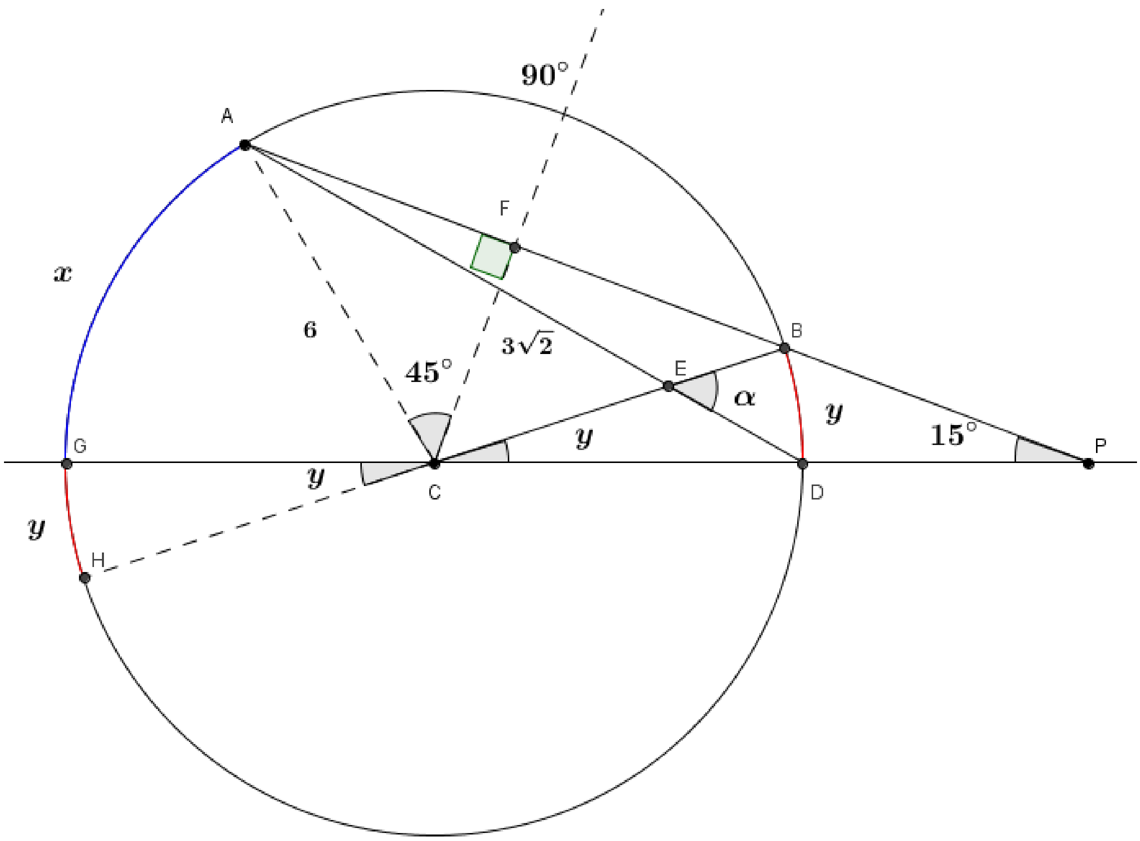
Denotando $A\hat{C}B = \alpha$ então $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha \Rightarrow A\hat{P}B = \alpha(Inscrito)$

Como $C\hat{B}Q = 90 - \alpha \Rightarrow B\hat{H}E = \alpha \Rightarrow A\hat{H}Q = \alpha$

Assim $\Delta AQH \equiv \Delta AQP \Rightarrow QP = 4$

Letra: E

15.



Na figura acima:

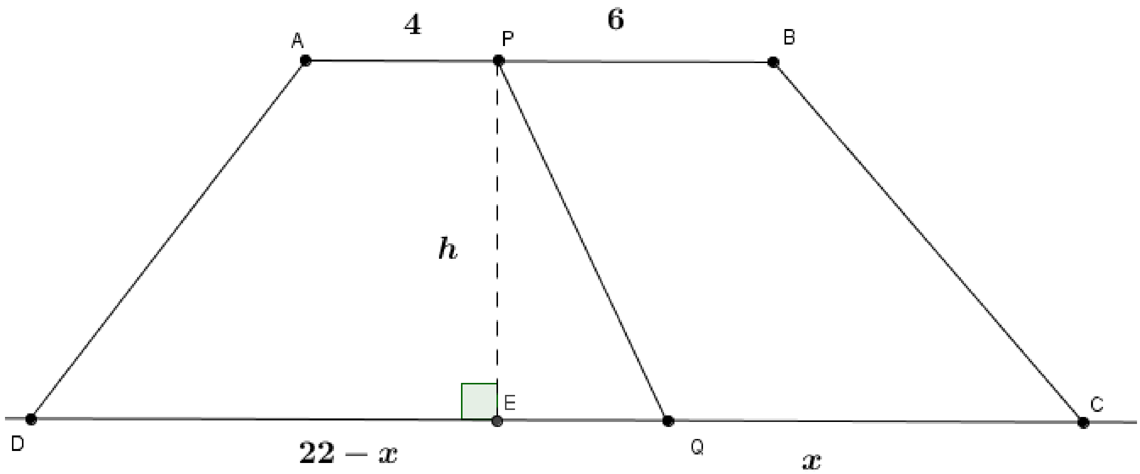
$$\Delta AEF \quad \cos(A\hat{C}F) = \frac{3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \cos(A\hat{C}F) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\hat{C}F = 45^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 15^\circ \\ x + y + 90^\circ = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 60^\circ \; e \; y = 30^\circ$$

Logo $\alpha = \dfrac{x+2y}{2} (Excêntrico\ Interior) \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Letra B

16.



Ambos os quadriláteros serão trapézios (pois suas bases são paralelas) de mesma altura. Logo

$$A_{APDQ} = A_{PBCQ} \Rightarrow \frac{(4+22-x)}{2}h = \frac{(6+x)}{2}h \Rightarrow 26 - x = 6 + x \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

Letra: A

17.

$$\frac{n^2+37}{n+5} = Inteiro \Rightarrow \frac{n^2+37}{n+5} = \frac{n^2-25+25+37}{n+5} = \frac{n^2-25}{n+5} + \frac{62}{n+5}$$

$$\frac{n^2+37}{n+5} = n - 5 + \frac{62}{n+5}$$

Logo $n+5 \in Div(62)$, Como deseja-se o maior inteiro, logo

$n + 5 = 62 \Rightarrow n = 57 \Rightarrow Soma\ dos\ algarismos\ 12$

Letra: D

18.

Temos que:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{ab} = 5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b} = 4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{ab} = 4 \\ 5 - 2b^2 = 16a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 1/2 \\ 16a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4 = a^2b^2(16a^2 - 8ab + b^2)$$

Como

$$16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4 = (ab)^2((16a^2+b^2) - 8ab) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(5 - 8.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Letra: E

19. Como $2^x.3^{4y+x}.(34)^x = 2^{x+1}.3^{4y+x}.17^x$ deve ser o menor múltiplo de 17, então

$x = 1$ e $y = 0$. Logo $2^1.3^1.34 = 204$

Soma dos algarismos 6

Letra: D

20. Temos que:

$$\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 14x + 49)}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-7)^2}{x - 10} \geq 0$$

Conjunto Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 7 \;\; ou \;\; x > 10\}$

Valores inteiros menores que $81/4 = 20,25$, pertencentes ao Conjunto Solução:

$\{7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Soma dos valores inteiros: $7 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 162$

Letra: Anulada