Gabarito Colégio Naval 2015 (Versão Amarela)

Matemática

1. Resposta: E

Elevando ao quadrado a primeira equação, temos:

$$x+\frac{3}{x}=9\Rightarrow$$
$$x^2+\frac{9}{x^2}+2x\frac{3}{x}=81\Leftrightarrow$$
$$x^2+\frac{9}{x^2}=75$$

Agora, vamos elevar ao quadrado a outra equação:

$$x-\frac{3}{x}=\sqrt{a}\Rightarrow$$
$$x^2+\frac{9}{x^2}-2x\frac{3}{x}=a\Leftrightarrow$$
$$75-6=a\Leftrightarrow$$
$$a=69$$

Cuja soma dos algarismos é 15

2.Anulada

Em A:

$$1\min \text{ ——————— } 19\times 0{,}04ml$$
$$x \text{ ——————— } 1000ml$$
$$x=\frac{1000}{19\times 0{,}04}$$

Em B:

$$1\min \text{ ——————— } 21\times 0{,}04ml$$
$$y \text{ ——————— } 1000ml$$
$$y=\frac{1000}{21\times 0{,}04}$$

A diferença entre os tempos será:

$$\frac{1000}{0,4}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1000}{0,04}\times\frac{2}{19\times 21}=\frac{1000}{0,04\times 199}\cong\frac{1000}{0,04\times 200}=125$$

3.Resposta: D

Sejam, $a=\sqrt{x+4}\ e\ b=\sqrt{x-1}$, temos:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-b^2=3 \end{cases}$$

Logo $(a-b)(a+b)=5\Rightarrow\ a-b=1$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$$

$a=3\ e\ b=2$

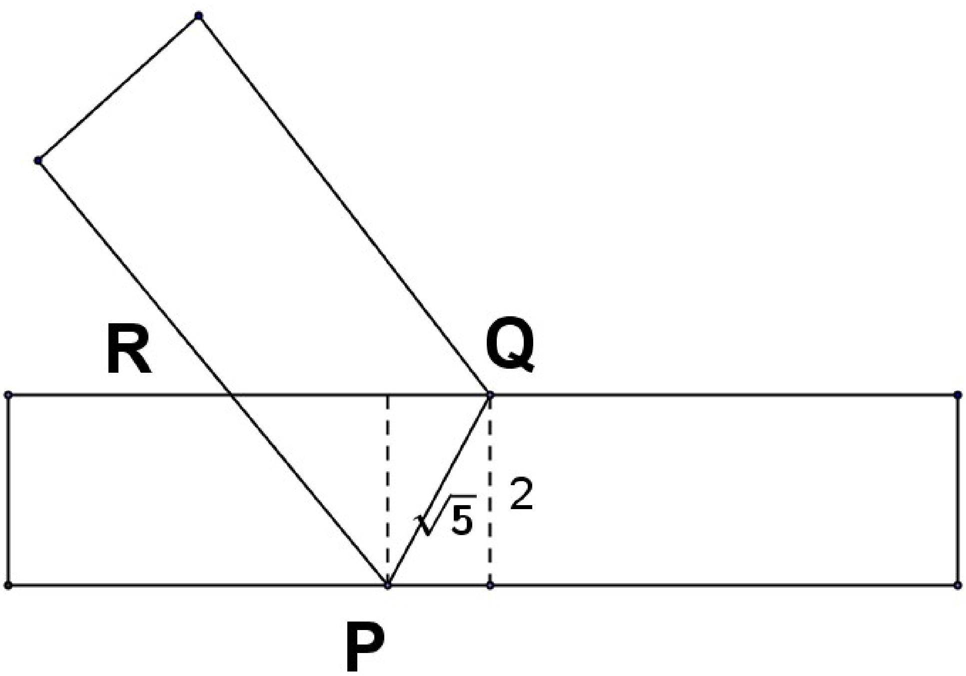
Substituindo:

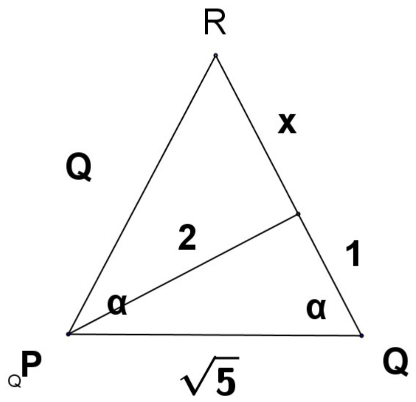
$\sqrt{x+4}=3\Rightarrow$

$x+4=9\Rightarrow$

$x=5$

4. Opção D





Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta\, RPQ$, temos:

$$\left(x+1\right)^2=\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2\left(x+1\right)\sqrt{5}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$2\left(x+1\right)\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}=5 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Assim a área do triângulo RQP é $S_{RQP}=\dfrac{\left(x+1\right)\times 2}{2}=\dfrac{5}{2}$.

A área procurada é

$$S_p = S_{ABCD} - S_{RQP} \Leftrightarrow$$

$$S_p = 20-\frac{5}{2}=\frac{35}{2}cm^2$$

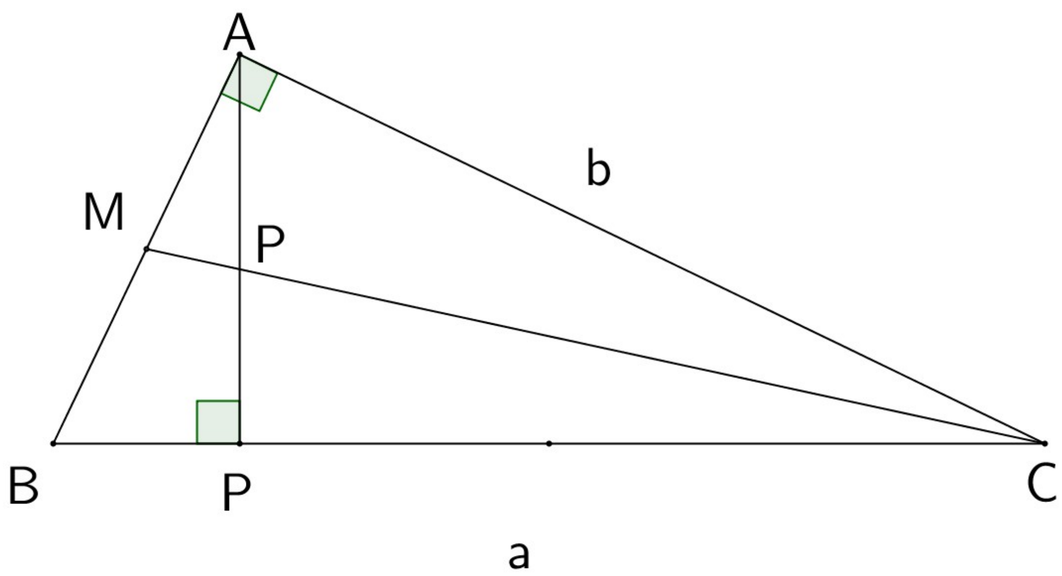
5.resposta: D

I- Como o raio do cinrculo circunscrito é metade da Hipotenusa, $R = 13$

II- O raio do circulo inscrito do triângulo retângulo é $r = p - a = \dfrac{60}{2} - 26 = 4$

Logo a razão entre os raios é: $\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}=\dfrac{16}{169}\cong 0,095$

6.Resposta: A



$$b^2 = a \times HC \Leftrightarrow HC = \frac{b^2}{a}$$

Pelas relações métricas no triângulo retângulo:

Aplicando o teorema de menelaus no triângulo ABH cortado pela reta MPC:

$$\frac{MA \times PH \times CB}{MB \times PA \times CH} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{AP}{PH} = \frac{a^2}{b^2}$$

7. Resposta: B

$$\frac{p}{q} = \frac{900}{525} = \frac{12}{7} \Rightarrow p = 12 \ e \ q = 7$$

$$\frac{q}{p+1} = \frac{7}{13} = 0,\overline{538461}$$

, cujo resto da divisão por 5 é 1.

8. Resposta: E

Como N deixa resto 1 na divisão por 3, 5, 7 e 11, então N-1 é divisível por 3, 5, 7 e 11.

Logo N-1 é divisível por $3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$.

Logo o resto na divisão de **por** 1155 é 1.

9.Resposta: C

$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus\left\{*1\right\}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus 2\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\frac{1}{3}\right]\right\}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\frac{1}{3}\right]\right\}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\frac{4}{3}\right\}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\frac{3}{7}\right)\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\left[*\frac{7}{10}\right]\right\}=$$
$$\oplus\left\{*\frac{17}{10}\right\}=$$
$$\oplus\left\{\frac{27}{10}\right\}=$$
$$\frac{10}{37}=\frac{a}{b}$$

Logo $a=10$ e $b=37$, assim, $\frac{2a}{b}=0,540540540...$

10.

(I) - Verdadeira

$$2^x = A,\ A^y = B,\ B^z = C \text{ e } C^K = 4096$$
$$2^{xy} = B \Rightarrow\ 2^{xyz} = C \Rightarrow\ 2^{xyzw} = 2^{12}$$

(II) - Verdadeira

$$t^m + \left(t^m\right)^p = \left(t^m\right)\left(1+\left(t^m\right)^{p-1}\right)$$

(III) - Falsa

$$r^q + r^{q^w} = r^q\left(1+r^{q^w-q}\right)$$

(IV) - Falsa

$\left(10^{100}\right)^{x} = 10^{199} \Rightarrow \ x = 199$

11. Gabarito: D

$$2014x^{2} - 2015x - 4029 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2014\left(x^{2} - 1\right) - 2015\left(x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2014\left(x - 1\right)\left(x + 1\right) - 2015\left(x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x + 1\right)\left(2014x - 2014 - 2015\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -1 \text{ ou } \mathrm{x} = \frac{4029}{2014}$$

Soma $6 + 0 + 1 + 3 = 13$.

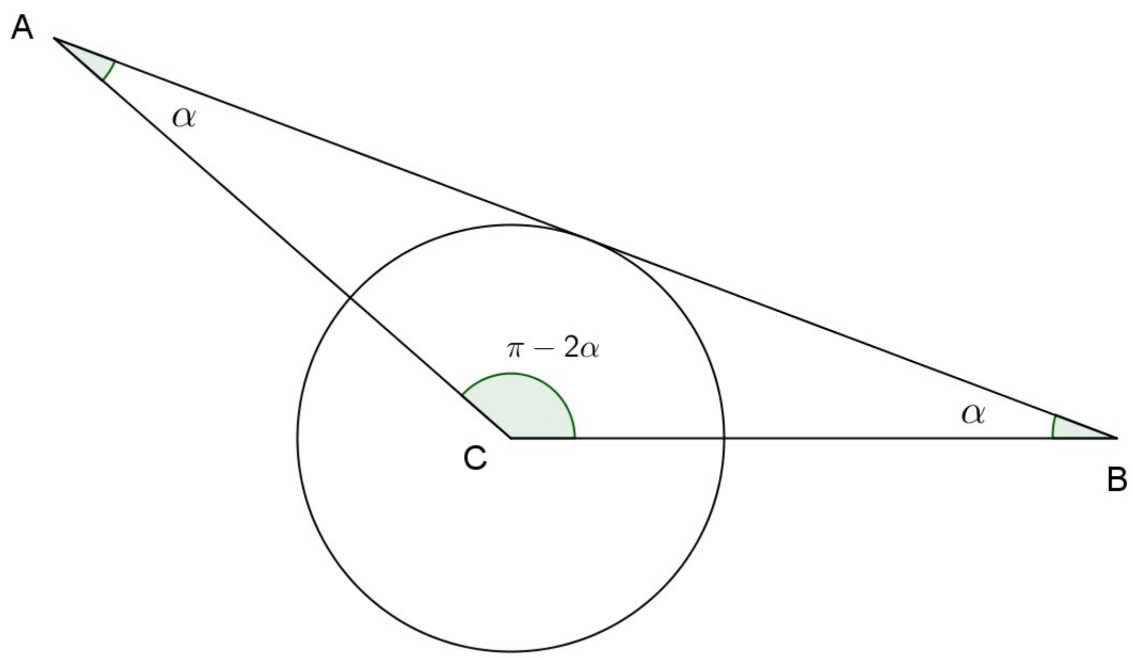
12.Resposta: E

$$\frac{y}{x - z} = 2 \text{ e } \frac{x + y}{z} = 2 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2x - 2z = y \\ x + y = 2z \end{cases} \Rightarrow$$
$$x = \frac{4z}{3}, y = \frac{2z}{3}.$$

Logo:

$$\left(\frac{4z}{3} - \frac{2z}{3}\right) \div \frac{6}{z} = \frac{2z}{3} \times \frac{6}{z} = 4$$

13. Resposta: A



Sejam os ângulos $\hat{C}BA$ e $\hat{C}AB$ iguais a α, logo $\hat{B}AC = \pi - 2\alpha$.

A interseção é dada pela por um setor circular de ângulo central BAC, logo:

$$S = \left(\frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \right) \left(\pi r^2 \right) = 4,5\left(\pi - 2\alpha \right)$$

Como $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, temos que $S \in \left(0,\ 4,5\pi \right)$.

Agora, repare que S não possui um valor máximo, já que o intervalo é aberto.

14.Gabarito B

$S(N)$ - soma dos algarismos de N.

$S(N) = 200.2 + 200.1 + 2015.0 \Rightarrow S(N) = 600.$

$$\begin{cases} S(N) \equiv 6 \left(\bmod 9 \right) \\ S(N) \equiv 0 \left(\bmod 3 \right) \end{cases} \Rightarrow N \text{ é divisível por } 3\text{, mas não é divisível por } 9\text{, logo nunca poderá ser quadrado perfeito.}$$

15.Gabarito: D

$$k^2x - kx = k^2 - 2k - 8 + 12x$$
$$k^2x - kx - 12x = k^2 - 2k - 8$$
$$x = \frac{k^2 - 2k - 8}{k^2 - k + 12} = \frac{(k-4)(k+2)}{(k-4)(k+3)}, \text{para que seja impossível temos:}$$
$$k = -3 \ e \, k \neq 4.$$
$$3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2}$$
$$6ay + a - 114y = 17b + 2$$
$$y(6a - 114) = -a + 17b + 2$$
$$y = \frac{-a + 17b + 2}{6a - 114}, \text{para que admita infinitas soluções temos que:}$$
$$6a - 114 = 0 \ e \ -a + 17b + 2 = 0, \text{logo:}$$
$$a = 19 \ e \ b = 1.$$
Então:
$$\frac{ab + k}{4} = \frac{19.1 - 3}{4} = 4.$$

16.

A substituição proposta nos dá o seguinte novo polinômio:

$$(py + q)^3 - 2(py + q)^2 - (py + q) + 2 = 0$$

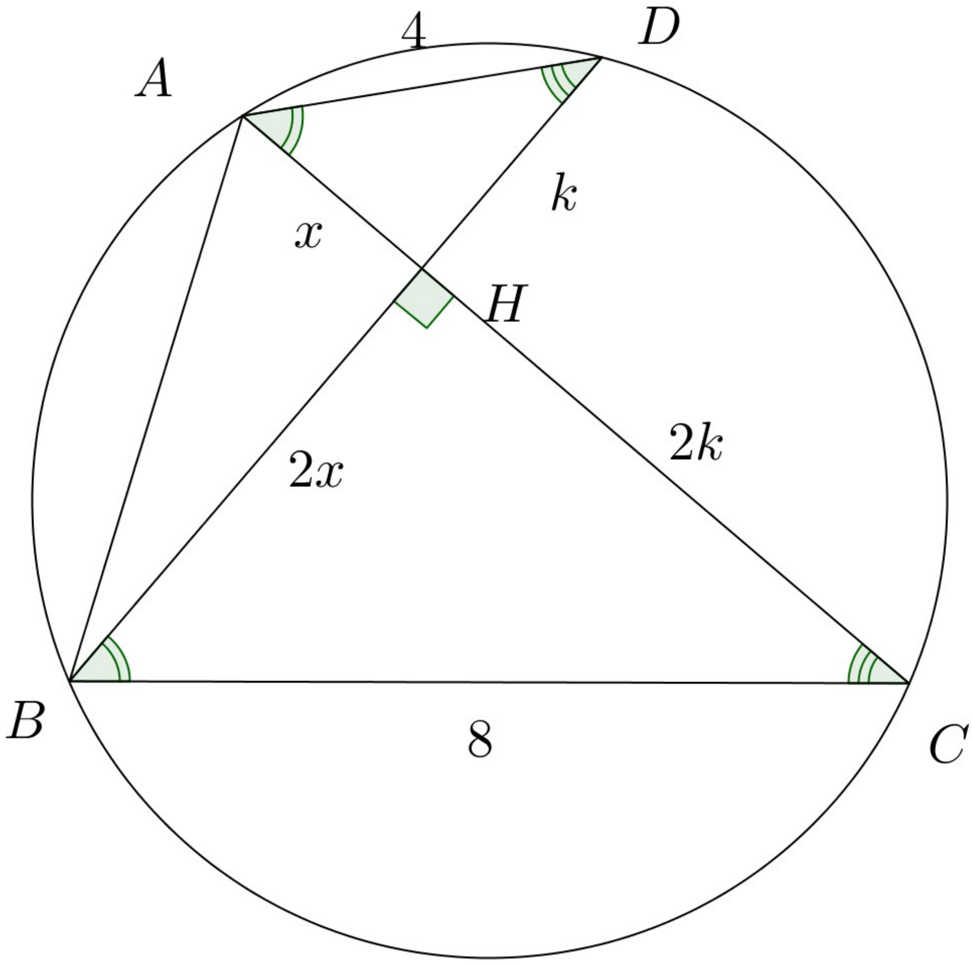
Se as raízes originais são $a, b \text{ e } c$, as raízes do polinômio acima ocorrerão quando:

$$\begin{cases} py + q = a \\ py + q = b \\ py + q = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a - q}{p} \\ y = \dfrac{b - q}{p} \\ y = \dfrac{c - q}{p} \end{cases}$$

Que também serão raízes reais, já que $a, b \text{ e } c$ são números reais, assim, este polinômio terá 3 raízes reais.

17.

Gabarito: C



$$\widehat{DAH} = \widehat{CBH} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \text{ e } \widehat{ADH} = \widehat{BCH} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \Delta ADH \sim \Delta BCH$$

$$\frac{AH}{4} = \frac{BH}{8} \Leftrightarrow \ AH = \frac{BH}{2} = x \Leftrightarrow \ AH = x \text{ e } BH = 2x.$$

Assim,

O triângulo AHB é retângulo em H, logo

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{5}$$

Portanto,

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC \times AC}{4R} = \frac{AC \times BH}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x\sqrt{5} \times 8}{4R} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{5}$$

18. Gabarito: A

Seja $2014 = x$.

Temos que:

$16452730046613 = 2014^4 + 2014^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1$

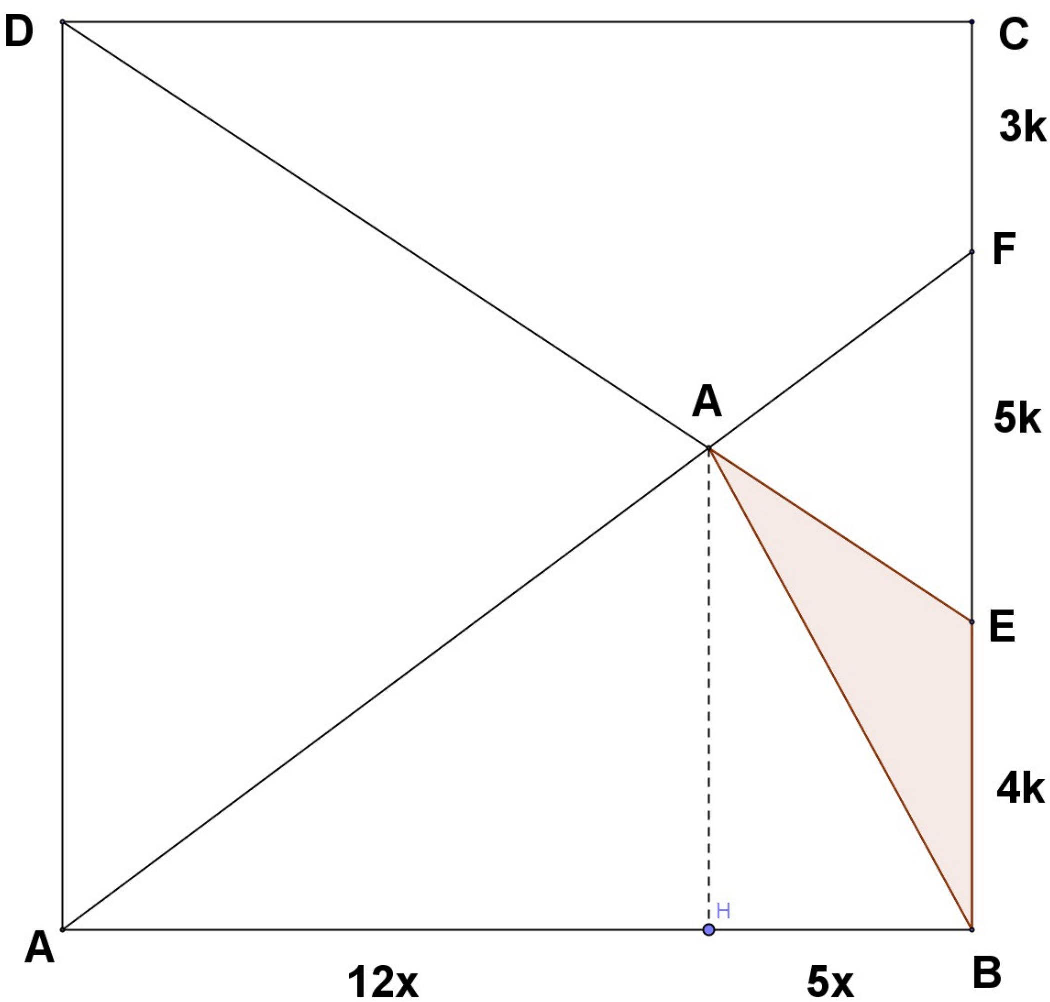
$4058211 = 2014^2 + 2014 + 1 = x^2 + x + 1$

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2 - x^2}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}{x^2 + x + 1} = x^2 - x + 1.$$

Como a divsão é exata,o resto é zero.

19.Resposta D



Seja $BC = 12k$, assim $BE = \dfrac{BC}{3} = 4k\,, CF = \dfrac{BC}{4} = 3k$, logo:

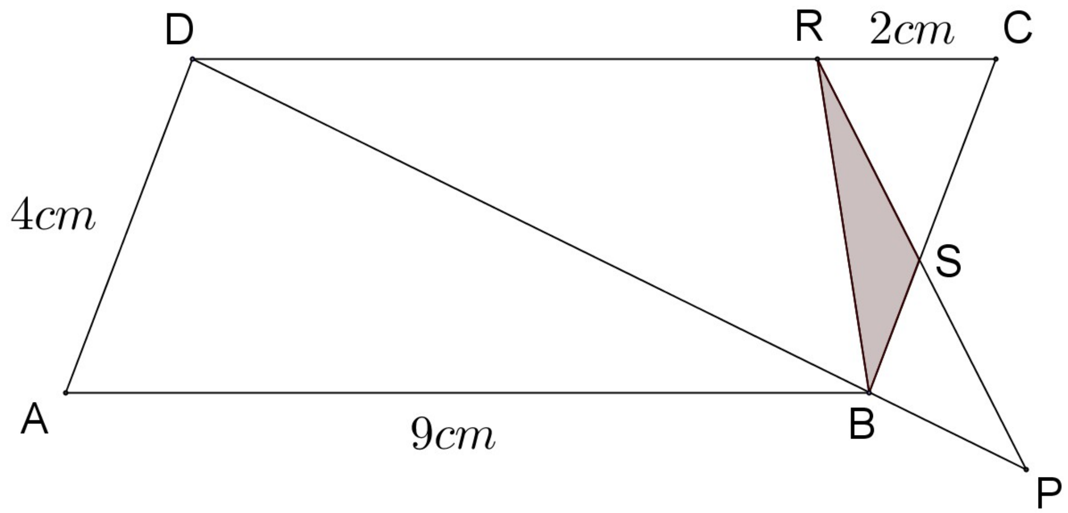
$EF = BC - \left(BE + CF\right) = 5k$

.

Os triângulos APD e FPE são semelhantes e a razão $\frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$, por isso suas alturas QB e AQ estão na razão $\frac{QB}{AQ} = \frac{5}{12}$ e podemos chamar $QB = 5x\ e\ AQ = 12x$.

Portanto $\frac{S_{BPE}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{4k \times 5x}{2}}{12k \times 17x} = \frac{5}{102} \cong 5\%$.

20. Opção C



Como $S_{BRC} = \frac{2}{9} S_{BRD}$ e $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, $S_{BRC} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{9} S_{ABCD}$,

E ainda $S_{RSC} = S_{BRC} - S_{BRS} = \frac{1}{9} S_{ABCD} - \frac{1}{36} S_{ABCD} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$.

Assim, $\frac{S_{RSC}}{3} = \frac{S_{BRS}}{1} \Leftrightarrow \frac{SC}{3} = \frac{BS}{1}$, e como $BC = 4$:

$SC = 3\ e\ BS = 1$

Aplicando o teotrema de Menelaus no triângulo CDB, interceptado pela reta RSP, temos:

$$\frac{CR \times DP \times BS}{CS \times DR \times BP} = 1 \Leftrightarrow \frac{2 \times DP \times 1}{3 \times 7 \times BP} = 1 \Leftrightarrow \frac{DP}{BP} = \frac{21}{2} = 10,5$$