GABARITO COMENTADO

Questão 01

Determine os valores reais de *x* que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

Solução:
Primeiramente, as únicas condições de existências que devem ser satisfeitas são $x > 0$ e $x \neq 1$ e $x \neq 3$

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{2\log_3 x - 2} + \log_x 3^{-2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_3 x - 1} - 2\log_x 3 > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\log_3 x - 1} - 2\frac{\log_3 3}{\log_3 x} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_3 x - 1} - \frac{2}{\log_3 x} > 1$$

Fazendo $y = \log_3 x$.

$$\frac{2}{y-1} - \frac{2}{y} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

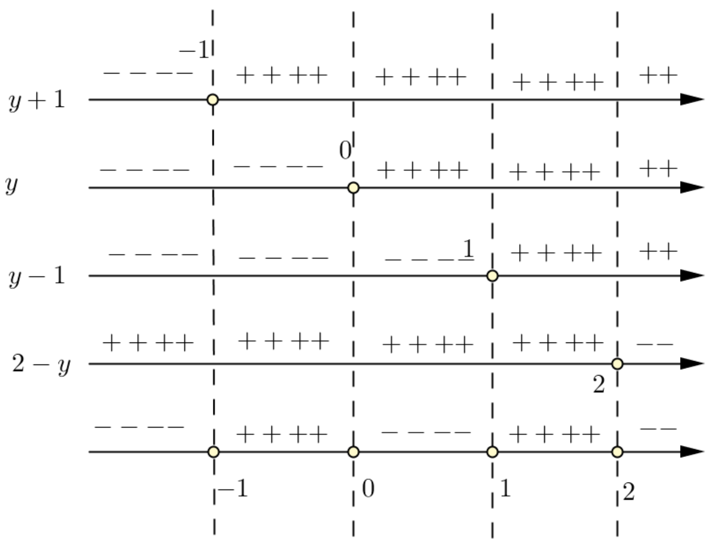
$$\frac{2y - 2(y-1) - y(y-1)}{y(y-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2y - 2y + 2 - y^2 + y}{y(y-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-y^2 + y + 2}{y(y-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(y+1)(2-y)}{y(y-1)} > 0$$

Solucionando esta inequação temos:



Logo,

$-1 < y < 0$ ou $1 < y < 2 \Leftrightarrow$

$-1 < \log_3 x < 0$ ou $1 < \log_3 x < 2 \Leftrightarrow$

$3^{-1} < x < 1$ ou $3 < x < 9$

Questão 02

Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{x+3}$$

Solução:
Primeiramente, a equação só será possível se:

$$\begin{aligned}&4x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\\&x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3\end{aligned}.$$

E ainda:

$x-\sqrt{4x-4} \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \geq \sqrt{4x-4} \Leftrightarrow$ (Já que $x \geq 1$)

$x^2 \geq 4x-4 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 \geq 0$

Que será sempre satisfeita. Agora vamos resolver a equação levando em conta as restrições acima:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4x+4}=3-x$$

A equação só é possível se: $x \leq 3$

Elevando ao quadrado: $4\left(x^2-4x+4\right)=9-6x+x^2$

$\Rightarrow 3x^2-10x+7=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=7/3$

Como as 2 soluções atendem às restrições temos:

$S=\{1,7/3\}$

Questão 03

Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação

$$arg(z-z_1)-arg(z-z_2)-arg(z-z_3)=k\pi,$$

em que z_1 é real, z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro.

Obs: $arg(z)$ é o argumento do número complexo z.

Solução:

Observe que a igualdade é equivalente $\dfrac{Z-Z_1}{(Z-Z_2)(Z-Z_3)} \in \mathbb{R}$.

Usando o fato de $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$, temos:

$$\frac{Z-Z_1}{(Z-Z_2)(Z-Z_3)} = \overline{\frac{Z-Z_1}{(Z-Z_2)(Z-Z_3)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{Z-Z_1}{(Z-Z_2)(Z-Z_3)} = \frac{\bar{Z}-Z_1}{(\bar{Z}-\bar{Z}_2)(\bar{Z}-\bar{Z}_3)} = \frac{\bar{Z}-Z_1}{(\bar{Z}-Z_3)(\bar{Z}-Z_2)} \Leftrightarrow$$

$$(Z-Z_1)(\bar{Z}-Z_3)(\bar{Z}-Z_2) = (\bar{Z}-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3) \Leftrightarrow$$

$$|Z|^2\,\bar{Z} - \cancel{(Z_2+Z_3)|Z|^2} + ZZ_2Z_3 - Z_1\bar{Z}^2 + (Z_2+Z_3)Z_1\bar{Z} - \cancel{Z_1Z_2Z_3} =$$

$$|Z|^2\,Z - \cancel{(Z_2+Z_3)|Z|^2} + \bar{Z}Z_2Z_3 - Z_1Z^2 + Z_1(Z_2+Z_3)Z - \cancel{Z_1Z_2Z_3} \Leftrightarrow$$

$$|Z|^2(\bar{Z}-Z) + (Z-\bar{Z})Z_2Z_3 - Z_1(\bar{Z}^2 - Z^2) + Z_1(Z_2+Z_3)(\bar{Z}-Z) = 0$$

$$(\bar{Z}-Z)\left[|Z|^2 - Z_2Z_3 - Z_1(\bar{Z}+Z) + Z_1(Z_2+Z_3)\right] = 0$$

$$\bar{Z} = Z \ \text{ ou } \ |Z|^2 - Z_2Z_3 - Z_1(\bar{Z}+Z) + Z_1(Z_2+Z_3) = 0$$

$$\bar{Z} = Z \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z \in \text{reta} = \overleftrightarrow{OX}$$

Fazendo $Z = x + iy$, a 2ª equação torna-se

$$X^2 - 2Z_1X + y^2 = Z_2Z_3 - Z_1(Z_2+Z_3) \Leftrightarrow$$

$$(X-Z_1)^2 + y^2 = Z_1^2 + Z_2Z_3 - Z_1(Z_2+Z_3)$$

Se $Z_2 = a + bi$, tem-se $Z_2Z_3 = Z_2\bar{Z}_2 = a^2 + b^2, Z_2 + Z_3 = 2a,$

Como $Z_1^2 + Z_2Z_3 - Z_1(Z_2+Z_3) = Z_1^2 + a^2 + b^2 - Z_1 \cdot 2a = (a-Z_1)^2 + b^2 > 0,$

Temos que a 2ª equação é uma circunferência de centro $(Z_1, 0)$ e raio $\sqrt{(a-Z_1)^2 + b^2}$.

Resposta: União da circunferência descrita com o eixo real.

Questão 04

Seja n um inteiro positivo cuja representação decimal é $a_m \ldots a_1 a_0$ e *f* a função que troca a posição dos dígitos a_{2i} e a_{2i+1}, de forma que $f(a_{2k+1}\, a_{2k} \ldots a_1 a_0) = a_{2k} a_{2k+1} \ldots a_0 a_1$. Por exemplo:

f(123456) = 214365
f(1034) = 143
f(123) = 1032
f(10) = 1

Determine o menor número maior que 99 que satisfaça à equação

$$x^2 = 9x + 9f(x) + (f(x))^2$$

Solução:
Primeiramente, vamos fatorar a equação dada:

$$x^2 = 9x + 9f(x) + (f(x))^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - (f(x))^2 = 9(x + f(x)) \Leftrightarrow$$

$$(x - (f(x)))(x + (f(x))) = 9(x + f(x)) \Leftrightarrow$$

$$x - f(x) = 9$$

Precisamos, portanto, que $x > f(x)$, logo, não podemos ter um número de 3 algarismos, então vamos tentar um número com 4 algarismos:

$$x = abcd \Rightarrow f(x) = badc$$

Temos que

$$abcd - badc = 9 \Leftrightarrow$$

$$1000a + 100b + 10c + d - 1000b - 100a - 10c - d = 9 \Leftrightarrow$$

$$900(a - b) + 9(c - d) = 9 \Leftrightarrow$$

$$a = b \quad e \quad c - d = 1$$

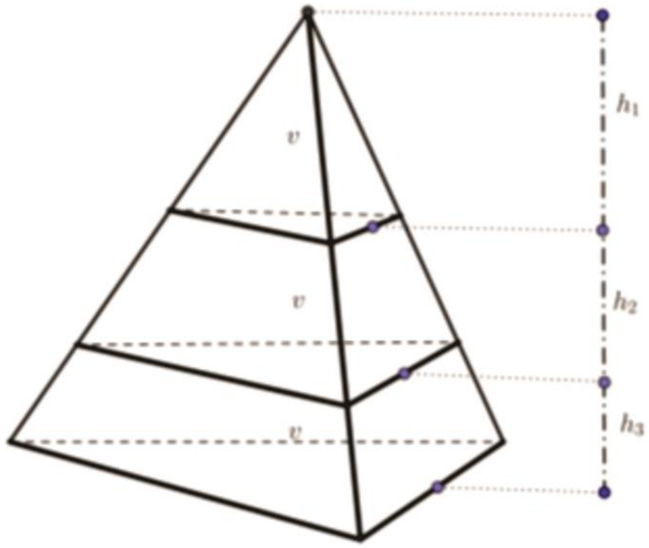
Para termos o menor x possível, basta tomarmos $a = b = 1, d = 0$ e $c = 1$.

Logo, $x = 1110$.

Questão 05	

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a *d*, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de *d*.

Solução:



Como os planos são paralelos às bases e a altura do tetraedro é $h = \frac{\sqrt{6}}{3}d$, comparando os volumes temos:

$$\frac{v}{3v} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \Leftrightarrow h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}}d$$

$$\frac{2v}{3v} = \left(\frac{h_1 + h_2}{h}\right)^3 \Leftrightarrow h_1 + h_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}h \Leftrightarrow h_2 = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}{3\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}d \Leftrightarrow h_2 = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{9}\right)}{9}d\,.$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \Leftrightarrow h_3 = h - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}h \Leftrightarrow h_3 = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)}{3\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}d \Leftrightarrow h_3 = \frac{\sqrt{6}\left(3 - \sqrt[3]{18}\right)}{9}d\,.$$

Questão 06

Pelo ponto *P* de coordenadas (-1,0) traçam-se as tangentes *t* e *s* à parábola $y^2 = 2x$. A reta *t* intercepta a parábola em *A* e a reta *s* intercepta a parábola em *B*. Pelos pontos *A* e *B* traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos *C* e *D*, respectivamente. Calcule o valor da razão *AB*/*CD*.

Solução:

Reta que passa por (-1, 0): $y = m(x+1)$

Como a reta é tangente à $y^2 = 2x$, temos que

$\left[m(x+1)\right]^2 = 2x \Leftrightarrow m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$, onde $\Delta = 0$. Logo,

$\Delta = 4(m^2-1)^2 - 4m^4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, e as retas são $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$.

Logo, $y^2 = 2x \Leftrightarrow m^2(x+1)^2 = 2x \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4x \Leftrightarrow x = 1$. Então temos os pontos $A\left(1,\sqrt{2}\right)$ e $B\left(1,-\sqrt{2}\right)$.

Para determinarmos os pontos C e D basta resolvermos os sistemas

$$\begin{cases} y + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ e } y = 3\sqrt{2}\ (\text{Ponto C}) \\ x = 1 \text{ e } y = -\sqrt{2}\ (\text{Ponto B}) \end{cases}$$

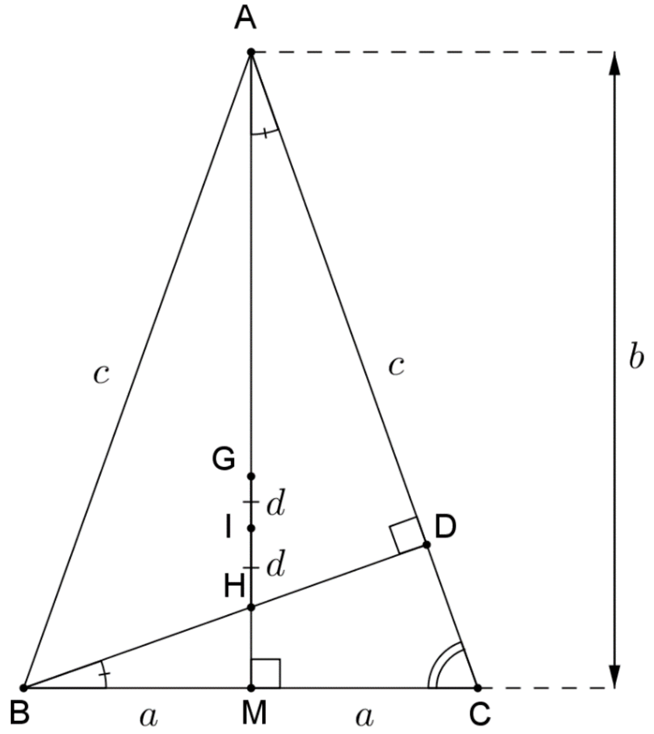
$$\begin{cases} y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ e } y = -3\sqrt{2}\ (\text{Ponto D}) \\ x = 1 \text{ e } y = \sqrt{2}\ (\text{Ponto A}) \end{cases}$$

Portanto $\frac{AB}{CD} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

Questão 07

Num triângulo *ABC* isósceles, com ângulos iguais em *B* e *C*, o seu incentro *I* se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro *H* a seu baricentro *G*. O segmento de reta *AG* é menor que o segmento de reta *AH*. Os comprimentos dos segmentos de reta *HI* e *IG* são iguais a *d*. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de *d*.

Solução:



$$\Delta BHM \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{HM}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow HM = \frac{a^2}{b}$$

$$\text{Área} = p \cdot r \Rightarrow \frac{2a \cdot b}{2} = (a + c) \cdot IM \Rightarrow IM = \frac{ab}{a+c}$$

$$GM = \frac{1}{3} AM \Rightarrow GM = \frac{b}{3}$$

I é médio de $GH \Rightarrow IM = \dfrac{GM + HM}{2} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot ab}{a+c} = \dfrac{b}{3} + \dfrac{a^2}{b}$

Chamando $b = ka \Rightarrow c^2 = a^2 + k^2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{1+k^2}$.

$$\Rightarrow \frac{2a \cdot ka}{a + a\sqrt{1+k^2}} = \frac{ka}{3} + \frac{a^2}{ka} \Leftrightarrow \frac{2k}{1+\sqrt{1+k^2}} = \frac{k^2+3}{3k} \Leftrightarrow 6k^2 = (k^2+3)\left(1+\sqrt{1+k^2}\right)$$

Fazendo $1 + k^2 = y^2$, com $y > 0$, temos:

$$6(y^2 - 1) = (y^2 + 2)(y + 1) \Leftrightarrow 6y - 6 = y^2 + 2 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow k = \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ y = 4 \Rightarrow k = \sqrt{15} \end{cases}$$

Para $k = \sqrt{3}$, o ΔABC é equilátero e não atende à condição $AG < AH$.

Para $k = \sqrt{15}$, temos $b = a\sqrt{15}$ e $c = a\sqrt{1+15} = 4a$.

$$GM - GH = 2d \Rightarrow \frac{b}{3} - \frac{a^2}{b} = 2d \Rightarrow \frac{a\sqrt{15}}{3} - \frac{a^2}{a\sqrt{15}} = 2d$$

$$\Rightarrow \frac{5a\sqrt{15}}{15} - \frac{a\sqrt{15}}{15} = 2d \Rightarrow a = \frac{d\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{d\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{15} = \frac{15d}{2} \text{ e } c = 4a = \frac{4d\sqrt{15}}{2} = 2d\sqrt{15}$$

$$\text{Área} = \frac{2a \cdot b}{2} = \frac{d\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{15d}{2} = \frac{15d^2\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Perímetro} = 2a + 2c = d\sqrt{15} + 4d\sqrt{15} = 5d\sqrt{15}$$

Questão 08

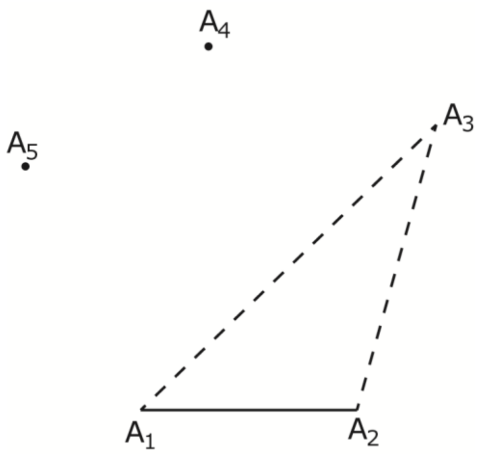
De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem.

Solução:

a_n = nº de maneiras de resolver este problema para o n–ágono

$$\text{Obviamente:} \begin{cases} a_3 = 1 \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

a_5:



O lado $A_1 A_2$ está em um dos triângulos

$A_1 A_2 A_3 \rightarrow$ resta um quadrilátero para partir

$A_1 A_2 A_4 \rightarrow$ restam 2 triângulos

$A_1 A_2 A_5 \rightarrow$ resta um quadrilátero

$\Rightarrow a_5 = a_4 + a_3 \times a_3 + a_4 = 2 + 1 \times 1 + 2$

$a_5 = 5$

a_6: Usando o mesmo raciocínio temos:

$a_6 = a_5 + a_4 \times a_3 + a_3 \times a_4 + a_5$

$= 5 + 2 + 2 + 5$

$\Rightarrow a_6 = 14$

a_7: $a_7 = a_6 + a_5 \times a_3 + a_4 \times a_4 + a_3 \times a_5 + a_6$
$= 14 + 5 + 2 \times 2 + 5 + 14 \Rightarrow a_7 = 42$

a_8: $a_8 = a_7 + a_6 \times a_3 + a_5 \times a_4 + a_4 \times a_5 + a_3 \times a_6 + a_7$
$= 42 + 14 + 5 \times 2 + 2 \times 5 + 14 + 42$
$\Rightarrow a_8 = 132$

a_9: $a_9 = a_8 + a_7 \times a_3 + a_6 \times a_4 + a_5 \times a_5 + a_4 \times a_6 + a_3 \times a_7 + a_8$
$= 132 + 42 + 14 \times 2 + 5 \times 5 + 2 \times 14 + 42 + 132$
$\Rightarrow a_9 = 429$

Questão 09

Sejam S = a+b+c e P = a.b.c. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2+(b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Solução:
Jacobi: 1ª linha por 1ª linha – 2 × 3ª linha
2ª linha por 2ª linha – 2 x 3ª linha

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & 0 & c^2-(a+b)^2 \\ 0 & (a+c)^2-b^2 & c^2-(a+b)^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & c-a-b \\ 0 & a+c-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Jacobi: 3ªcol: 3ªcol – 1ªcol – 2ªcol

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -2b \\ 0 & a+c-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a+b+c)^2 \left[(b+c-a) \begin{vmatrix} a+c-b & -a \\ b^2 & ab \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a+c-b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 2(a+b+c)^2 ab \left[(b+c-a) \begin{vmatrix} a+c-b & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + (a+c-b)a \right] =$$

$$= 2(a+b+c)^2 ab \left[(b+c-a)\left(a+c-\cancel{b}+\cancel{b}\right) + \left(a+c-b\right)a \right] =$$

$$= 2(a+b+c)^2 ab \left[\cancel{ab} + bc + ac + c^2 - \cancel{a^2} - \cancel{ac} + \cancel{a^2} + \cancel{ac} - \cancel{ab} \right] =$$

$$= 2(a+b+c)^2 abc\left(a+b+c\right) = 2S^3P$$

Questão 10

Os coeficientes $a_0, \ldots, a_{2014}$ do polinômio $P(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \ldots + a_1x + a_0$ são tais que $a_i \in \{0,1\}$, para $0 \le i \le 2014$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras de P(x)?

b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

Solução:

a) $a_0 = 1 \Rightarrow$ Possíveis raízes inteiras: + 1 ou − 1

Como $a_i \ge 0 \Rightarrow$ não existe raiz positiva

Logo as possíveis raízes inteiras: − 1

b) $a_0 = 0 \Rightarrow$ *0* é uma possível raiz inteira.

Se $a_o = 0$

$\Rightarrow$ Seja k o menor valor tal que $a_k \neq 0 \Rightarrow$

$P(x) = x^k.Q(x)$, onde $Q(x)$ termina em 1 e recai no caso anterior em que $Q(x)$ só pode ter -1 como raiz inteira. Logo $Q(x)$ só pode ter raiz inteiras −1 e 0.

Conclusão: Possíveis raízes inteiras: − 1 e 0

b) $P(x) = x^{2015} + \sum_{i=0}^{2014} a_i x^i$

Como 0 é raiz $\Rightarrow a_0 = 0$

$P(x) = x^{2015} + \sum_{i=1}^{2014} a_i x^i$

Como − 1 é raiz temos:

$P(-1) = -1 + \sum_{i=1}^{2014} a_i(-1)^i = 0$, $a_i = 0$ ou $a_i = 1$

Conclusão: nº de $a_i = 1$ com *i* ímpar tem que ser uma unidade a menos que nº de $a_i = 1$ com *i* par.

Existem 1007 índices com *i* ímpar e 1007 índices com *i* par

$$\begin{matrix} S_{impar} = k \\ S_{par} = k+1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Número de maneiras} = C_{1007}^{K} \times C_{1007}^{K+1} = C_{1007}^{K} \times C_{1007}^{1006-K}$$

Para todo k, $0 \le k \le 1006$

Nº de maneiras: $\sum_{k=0}^{1006} C_{1007}^{k} \cdot C_{1007}^{k+1} = \sum_{k=0}^{1006} C_{1007}^{k} C_{1007}^{1006-k}$

Pela fórmula de Euler $\Rightarrow$ nº de maneiras = C_{2014}^{1006}

Comentário sobre a prova

Embora pareça redundante dizer que a Prova do IME tenha sido difícil, nossa opinião é de que esta prova foi ainda mais difícil do que as que vimos nos últimos anos.

Na nossa opinião havia apenas 4 questões mais acessíveis, as questões 1, 2, 5 e 6. As questões 3 e 4 já exigiam uma capacidade maior por parte do aluno e da 7 em diante a Prova estava de altíssimo nível.

Fazia tempo que não víamos uma questão de geometria plana tão difícil quanto a questão Nº 7. A questão 8, de análise combinatória, está a nível das principais Olimpíadas de Matemática e a questão 9 até poderia ser considerada simples, mas não era tão fácil assim evitar que as contas daquele determinante não crescessem tanto.

A 10ª questão era mais fácil que as anteriores embora não seja tão fácil ganhar a pontuação completa.

Acreditamos que dada a dificuldade da prova, o aluno que ultrapassar a faixa dos 5 pontos já pode se considerar bem para continuidade do concurso.

Equipe de Professores:

Bruno Pedra
Raphael Constant
Marcelo Xavier
Jean Pierre
Ricardo Secco
Renato Madeira
Thiago Esquian
André Felipe
Rafael Sabino