GABARITO ITA

MATEMÁTICA

GABARITO

01.	D	**11.**	B
02.	C	**12.**	E
03.	D	**13.**	C
04.	E	**14.**	D
05.	D	**15.**	E
06.	E	**16.**	A
07.	B	**17.**	E
08.	B	**18.**	A
09.	C	**19.**	A
10.	A	**20.**	C

GABARITO COMENTADO

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
I : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re(z) : parte real do número $z \in \mathbb{C}$
Im(z) : parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
det *A* : determinante da matriz *A*
tr *A* : traço da matriz quadrada *A*, que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de *A*.
Potência de matriz : $A^1 = A, A^2 = A \cdot A, \ldots, A^k = A^{k-1} \cdot A$, sendo *A* matriz quadrada e *k* inteiro positivo.
d(P, r) : distância do ponto *P* à reta *r*
$\overline{AB}$: segmento de extremidades nos pontos *A* e *B*
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$
$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$X \backslash Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$
$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sendo *n* inteiro não negativo

Observação: os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01	**Letra: D**

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$

III. $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

(A) nenhuma.
(B) apenas II.
(C) apenas I e II.
(D) apenas I e III.
(E) I, II e III.

Solução:

I. Verdadeira. Para que o número seja racional, é preciso que sua expansão decimal seja finita ou infinita e periódica.

II. Falsa.

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2-1}\right)} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} . \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$$

III. Verdadeira.

$$\ln \sqrt[3]{e^2} + \left(\log_3 2\right)\left(\log_4 9\right) = \ln e^{\frac{2}{3}} + \left(\log_3 2\right)\left(\log_{2^2} 3^2\right) =$$

$$\frac{2}{3}\ln e + \left(\log_3 2\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\log_2 3\right) = \frac{2}{3} + \left(\cancel{\log_3 2}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\log_3 2}}\right) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{2} \in Q$$

Questão 02	**Letra: C**

Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto

(A) $\{-1-3i, -1+3i\}$.
(B) $\{-3-i, -3+i\}$.
(C) $\{-3+i\}$.
(D) $\{-3-i\}$.
(E) $\{-1+3i\}$.

Solução:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19} \right\}$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + i| < \frac{7}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0 \right\}$$

Temos que:

$$z^2 + 6z + 10 = 0$$

$$\Delta = 36 - 40 \Rightarrow \Delta = -4$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} \Rightarrow z_{1,2} = -3 \pm i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -3 + i \\ z_2 = -3 - i \end{cases}$$

Verificando z_1, temos:

Substituindo em *A*:

$$|-3 + i + 2 - 3i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5} < \sqrt{19}$$

logo, $z_1 \in A$

Substituindo em *B*:

$$|-3 + i + i| = |-3 + 2i| = \sqrt{13} > \frac{7}{2}$$

logo, $z_1 \notin B$

logo, $z_1 \in (A - B) \cap C$

Verificando z_2, temos:

Substituindo em *A*:

$$|-3 - i + 2 - 3i| = |-1 - 4i| = \sqrt{17} < \sqrt{19}$$

$z_2 \in A$

Substituindo em *B*:

$$|-3 - i + i| = 3 < \frac{7}{2}$$

logo, $z_2 \in B$

logo, $z_2 \notin (A - B) \cap C$

Apenas Z_1 satisfaz.

Conclusão:
Resposta: $z_1 = -3 + i$

Questão 03	**Letra: D**

Se $z = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de 2 arcsen(Re(z)) + 5 arctg(2 Im(z)) é igual a

(A) $-\dfrac{2\pi}{3}$.

(B) $-\dfrac{\pi}{3}$.

(C) $\dfrac{2\pi}{3}$.

(D) $\dfrac{4\pi}{3}$.

(E) $\dfrac{5\pi}{3}$.

Solução:

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} \Leftrightarrow z = \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^{10} \Leftrightarrow z = \left(\frac{cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}{cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{10} \Leftrightarrow z = \left(cis\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{10} \Leftrightarrow$$

$$z = \left(cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10} \Leftrightarrow z = cis\left(\frac{2\pi}{3}.10\right) \Leftrightarrow z = cis\left(\frac{20\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = cis\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$z = cis\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2arcsen(\mathrm{Re}(z)) + 5arctg(2\,\mathrm{Im}(z)) = 2arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) + 5arctg\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$2arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) + 5arctg\left(\sqrt{3}\right) = \cancel{2}\left(-\frac{\pi}{\cancel{6}}\right) + 5\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

Questão 04	**Letra: E**

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r : 3x + 4y - 4 = 0$ e $s : 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

(A) $\dfrac{5\pi}{7}$.

(B) $\dfrac{4\pi}{5}$.

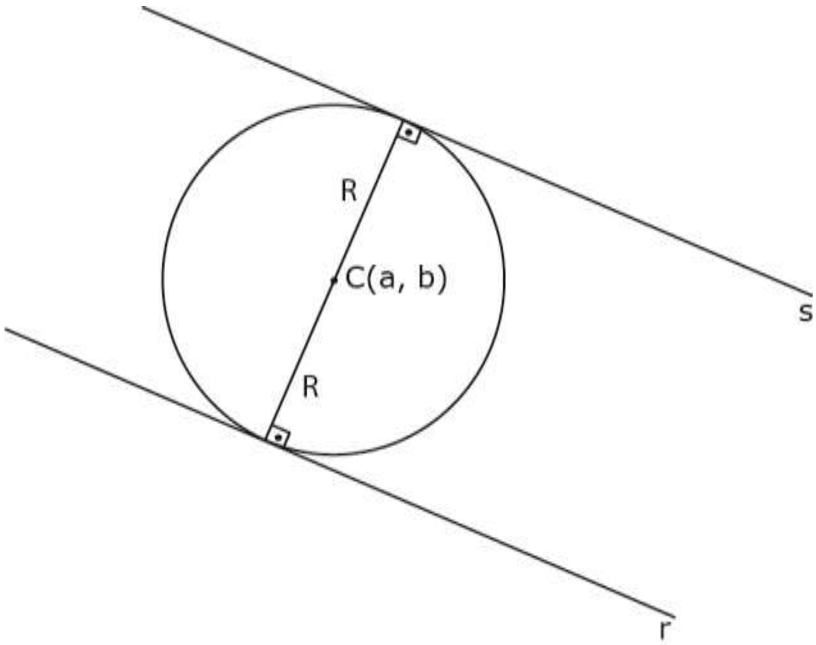
(C) $\dfrac{3\pi}{2}$.

(D) $\dfrac{8\pi}{3}$.

(E) $\dfrac{9\pi}{4}$.

Solução:
Dadas as retas:
r: $3x + 4y - 4 = 0$
s: $3x + 4y - 19 = 0$
concluímos que as retas r e s são paralelas pois $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} \neq \frac{-4}{-19}$.

Consideremos a circunferência de centro em C (a, b)



$R = d_{cr} = d_{cs}$

$$R = \left|\frac{3a + 4b - 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{3a + 4b - 19}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right|$$

$|3a + 4b - 4| = |3a + 4b - 19|$

$6a + 8b = 23$ e $R = \frac{|3a + 4b - 4|}{5}$

como $3a + 4b = \frac{23}{2}$ *temos* :

$$R = \frac{\left|\frac{23}{2} - 4\right|}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{9\pi}{4} u.a.$$

Questão 05	**Letra: D**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
II. a_7 é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s):

(A) apenas II.
(B) apenas I e II.
(C) apenas I e III.
(D) apenas II e III.
(E) I, II e III.

Solução:
I. Falsa
Supondo que a_p, a_{p+1} e a_{p+2} formam uma PG temos:

$$a_{p+2} = mq^2; \ a_{p+1} = mq; \ a_p = m$$

$$mq^2 = mq + m$$

$$q^2 = q + 1$$

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Contradição pois a razão deve ser racional
II. Verdadeira

$$a_1 = 1, \ a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$$

III. Verdadeira
Provaremos por Indução que toda sequência $(a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k})$ é da forma $(ímpar, ímpar, par)$.

1° passo: $k = 1$
$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 1,\ 2)$ ok

2º passo (Hipótese de Indução): $k = n$
$(a_{3n-2},\ a_{3n-1},\ a_{3n}) = (ímpar,\ ímpar,\ par)$

3° passo: $k = n + 1$

$(a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}) = (\text{ímpar}, \text{ímpar}, \text{par})$

$$\begin{cases} a_{3n+1} = a_{3n-1} + a_{3n} \Rightarrow a_{3n+1} = \text{ímpar} + \text{par} \Rightarrow a_{3n+1} = \text{ímpar} \\ a_{3n+2} = a_{3n+1} + a_{3n} \Rightarrow a_{3n+2} = \text{ímpar} + \text{par} \Rightarrow a_{3n+2} = \text{ímpar} \\ a_{3n+3} = a_{3n+2} + a_{3n+1} \Rightarrow a_{3n+3} = \text{ímpar} + \text{ímpar} \Rightarrow a_{3n+3} = \text{par} \end{cases} \Rightarrow (a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+2}) = (\text{ímpar}, \text{ímpar}, \text{par}) \ \ ok$$

Portanto, para qualquer n múltiplo de 3, a_n é par.

Questão 06	**Letra: E**

Considere a equação $\dfrac{a}{1-x^2} - \dfrac{b}{x-1/2} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se a = 1 e b = 2, então x = 0 é uma solução de equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \dfrac{1}{2}, x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \dfrac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

(A) apenas II.
(B) apenas I e II.
(C) apenas I e III.
(D) apenas II e III.
(E) I, II e III.

Solução:

$$\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-1/2} = 5$$

I. Verdadeira

$$a = 1 \ \text{ e } \ b = 2 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} - \frac{2}{x-1/2} = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-0} - \frac{2}{0-1/2} = 5 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{1/2} = 5 \Leftrightarrow 1 + 4 = 5 \ \ ok$$

II. Verdadeira

As condições de existência exigem que os denominadores sejam não nulos. Logo,

$$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \\ x - 1/2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1/2 \end{cases}$$

III. Verdadeira

$$x = 2/3 \Rightarrow \frac{a}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{5}{9}} - \frac{b}{\frac{1}{6}} = 5 \Leftrightarrow \frac{9a}{5} - 6b = 5 \Leftrightarrow$$

$$9a - 30b = 25 \Leftrightarrow 9a = 30b + 25 \Leftrightarrow 9a = 5(6b+5)$$

$$a, b \in Z_+^* \Rightarrow 9 \mid 6b + 5 \ \ \textit{absurdo}!$$

Questão 07	**Letra: B**

Considere o polinômio *p* dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que *p* admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de *p*, então o valor de *b* − *a* é igual a

(A) −36.
(B) −12.
(C) 6.
(D) 12.
(E) 24.

Solução:
$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$
Sabendo que 2 é raiz e que P(x) admite uma raiz dupla, temos 2 casos a analisar:

1º caso
Raízes 2, r e r
com $r \neq 2$

2º caso
raízes 2, 2 e s
com $s \neq 2$

Pelas relações de Girard temos como o produto das raízes $-\left(\frac{16}{2}\right) = 8$, daí teremos

1º caso
2 . r. r = 8
$r^2 = 4$
$r = -2$ (pois $r \neq 2$)

2º caso
2 . 2. s = 8
s = 2, onde contraria as condições do problema, pois 2 seria uma raiz tripla.

Assim as raízes de P(x) são -2, -2 e 2.

2 é raiz $\Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow \cancel{2.2^3} + a.2^2 + b.2 - \cancel{16} = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$

-2 é raiz $\Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow 2(-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) - 16 = 0 \Leftrightarrow 4a - 2b = 32 \Leftrightarrow 2a - b = 16$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a - b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b - a = -12}$$

Questão 08	**Letra: B**

Seja *p* o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,...15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que *i* é uma raiz de *p* e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de *p* pelo polinômio *q*, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

(A) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.
(B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.
(C) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

(D) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

(E) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Solução:

$q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2+1)(x-2)$

Como i é raiz de p, temos que −i também é, logo $p(i) = p(-i) = 0$ e $p(2) = 1$.

Dividindo $p(x)$ por $q(x)$, seja o quociente $Q(x)$ e o resto $r(x)$, então $p(x) = q(x).Q(x) + r(x)$, onde $r(x)$ é no máximo de grau 2. Seja $r(x) = ax^2 + bx + c$. Como $q(2) = q(i) = q(-i) = 0$

$$\begin{cases} p(2) = q(2)Q(2) + r(2) \Rightarrow r(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ p(i) = q(i)Q(i) + r(i) \Rightarrow r(i) = 0 \Rightarrow -a + bi + c = 0 \\ p(-i) = q(-i)Q(-i) + r(-i) \Rightarrow r(-i) = 0 \Rightarrow -a - bi + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1/5 \\ b = 0 \\ c = 1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{r(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}$$

Questão 09	**Letra: C**

Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}, 2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

(A) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(B) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

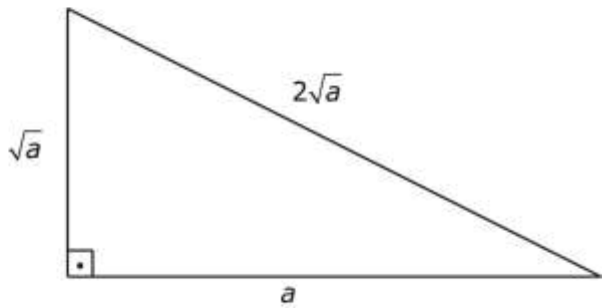
(D) $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

(E) $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$.

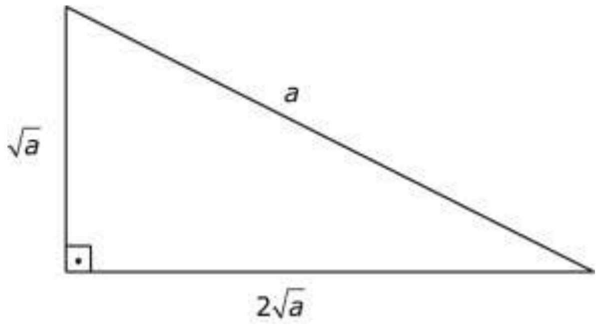
Solução:

Como $\sqrt{a} < 2\sqrt{a}$, temos 2 situações para a

I. $\sqrt{a} < a < 2\sqrt{a} \Rightarrow$



II. $\sqrt{a} < 2\sqrt{a} < a \Rightarrow$



Logo $a^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(2\sqrt{a}\right)^2 \Leftrightarrow a = 5.$

Temos então que o maior valor de hipotenusa é 5, portanto a tangente do seu menor ângulo é $\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$, logo $\theta = \text{arctg}\frac{1}{2}$.

Questão 10	**Letra: A**

Os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem a equação 2 sen x − cos x = 1 são

(A) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.

(B) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.

(C) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.

(D) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.

(E) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π.

Solução:

$2senx - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2senx = 1 + \cos x \Rightarrow (2senx)^2 = (1 + \cos x)^2 \Leftrightarrow$

$4sen^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2 x\right) = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow$

$$4 - 4\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow 5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$1^{\text{o}}\, caso : \cos x = -1$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi \Rightarrow senx = 0$

$2senx - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2.0 - (-1) = 1 \;\; ok \Rightarrow \boxed{x = \pi}$

$2^{\text{o}}\, caso : \cos x = \dfrac{3}{5}$

$\cos x = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow senx = \pm\dfrac{4}{5}$

$$2senx - \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{3}{5} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{5} = 1 \;\; ok \Rightarrow \boxed{x = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)} \\ 2\left(-\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{3}{5} = 1 \Leftrightarrow \cancel{-\dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{5} = 1} \end{cases}$$

Lembrando que todas as conclusões acima já levam em consideração o fato de que $x \in [0, 2\pi]$.

Questão 11	**Letra B**

Sejam α e β números reais tais que α, β, $\alpha+\beta \in]0,2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4 \frac{\beta}{3} = \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de cos $(\alpha+\beta)$ é igual a

(A) – 1.

(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $-\dfrac{1}{2}$.

(E) 0.

Solução:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5}=0\Leftrightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}=1\ \ ou\ \ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm1\ \ ou\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=k\pi\ \ ou\ \ \frac{\alpha}{2}=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cancel{\alpha=2k\pi}\ \ ou\ \ \alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}\ \ ou\ \ \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

$$\cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3}+\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3}-\cos^2\frac{\beta}{3}+\frac{3}{7}=0\Leftrightarrow\cos^2\frac{\beta}{3}=1\ \ ou\ \ \cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\beta}{3}=\pm1\ \ ou\ \ \cos\frac{\beta}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{3}=k\pi\ \ ou\ \ \frac{\beta}{3}=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\cancel{\beta=3k\pi}\ \ ou\ \ \beta=3k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\begin{cases}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Lembrando que todas as conclusões acima já levam em consideração o fato de que $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\left]0,\ 2\pi\right[$.

Questão 12	**Letra: E**

Seja $A=(a_{ij})_{5\times5}$ a matriz tal que $a_{ij}=2^{i-1}(2j-1)$, $1\le i,j\le5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.
II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. tr A é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

(A) apenas I.
(B) apenas I e II.
(C) apenas II e III.
(D) apenas I e III.
(E) I, II e III.

Solução:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\2&6&10&14&18\\4&12&20&28&36\\8&24&40&56&72\\16&48&80&112&144\end{pmatrix}_{5\times5}$$

I. √
II. √
III. TrA = 1+6+20+56+144 = 227

Questão 13	**Letra: C**

Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, $i, j = 1,2$. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252,$$

então o valor de n é igual a

(A) 4.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.
(E) 8.

Solução:
$m_{11} = 1 - 1 + 1 = 1$
$m_{12} = 2 - 1 + 1 = 2$
$m_{21} = 1 - 2 + 1 = 0$
$m_{22} = 2 - 2 + 1 = 1$

$$M = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$M^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$M^3 = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Conjectura: $M^k = \begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Prova: indução

$k = 1 \Rightarrow M^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ verdade

Suponha $M^j = \begin{pmatrix}1 & 2j\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e observe:

$M^{j+1} = \begin{pmatrix}1 & 2j\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\cdot(j+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, logo a conjectura é verdadeira.

$$\sum M^k = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \ldots + = \begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n & n(n+1)\\ 0 & n\end{pmatrix}$$
$$\sum M^k - n\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}n-n & n(n+1)\\ -n & n-n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & n(n+1)\\ -n & 0\end{pmatrix}$$

Det = $n \cdot n\,(n+1)$
$n^2\,(n+1) = 252$

note que $F(x) = x^2(x+1)$
É estritamente crescente para $x > 0$ e $F(6) = 6^2 \cdot (6+1) = 252$

Logo $n = 6$

Questão 14	**Letra: D**

Considere os pontos $A = (0, -1)$, $B = (0,5)$ e a reta r: $2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A, r) = d(B, r)$.

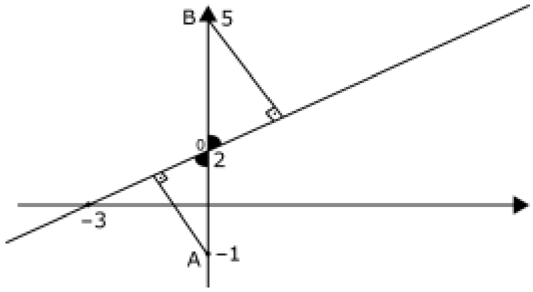
II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (3\sqrt{3}, 2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

(A) I.
(B) II.
(C) I e II.
(D) I e III.
(E) II e III.

Solução:



$2x - 3y + 6 = 0$

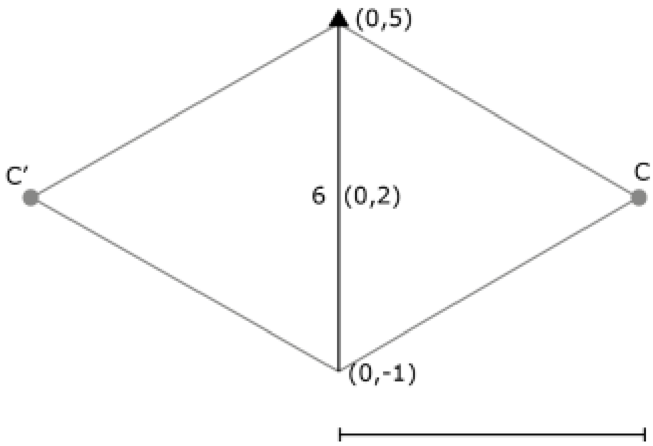
$\overline{AO} = \overline{BO} = 3$

Como os triângulos são semelhantes com hipotenusas iguais, logo são congruentes.

I) $d(A, r) = d(B, r)$ (V)

II) A e B seriam simétricos se a reta r fosse horizontal (F)

III)



$h = 3\sqrt{3}$

$h = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (V)

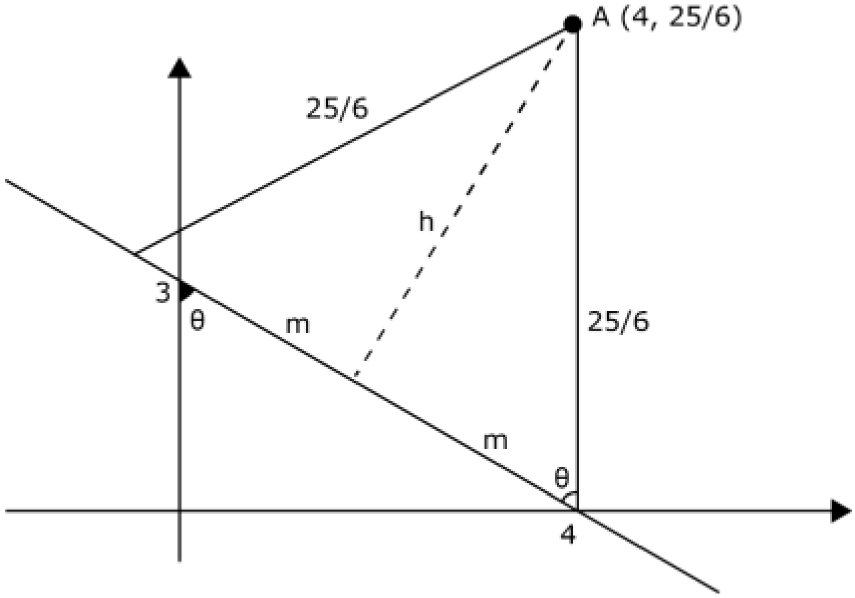
$C = \left(\pm 3\sqrt{2}, 2\right)$

Questão 15	**Letra: E**

Dados o ponto $A = \left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta r: $3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

(A) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
(B) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$.
(C) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$.
(D) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$.
(E) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

Solução:



$\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$m = \frac{25}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{3}$

Área $= \frac{2m \cdot h}{2} = m \cdot h = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$

Perímetro $= \frac{25}{6} + \frac{25}{6} + 5 = \frac{25}{3} + 5 = \frac{40}{3}$

Questão 16	**Letra: A**

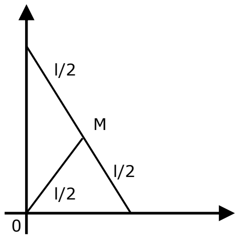
Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.
III. Os pontos (2,3), (4, −1) e (3,1) pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas III.
(D) I e II.
(E) I e III.

Solução:
I)



$\overline{MO}$ = l/2 (FIXO)

Circunferência de raio $\frac{l}{2}$ (V)

OBS.: Supusemos que os extremos estão em eixos coordenados distintos ou no máximo um extremo na interseção dos eixos, embora o enunciado não deixe isso claro. A rigor a resposta seria uma circunferência de centro (0,0) e raio l/2 união com os eixos coordenados.
II)

$$x\left(6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y\right) = 0$$

$$x \cdot \left[(2x + y)(3x - y) - 2(2x + y)\right] = 0$$

$$x \cdot (2x + y)(3x - y - 2) = 0$$

3 retas (F)

III)
Para que 3 pontos estejam sobre uma circunferência, é necessário e suficiente que não sejam colineares.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 9 - 2 + 3 - 12$$

$$= 0$$

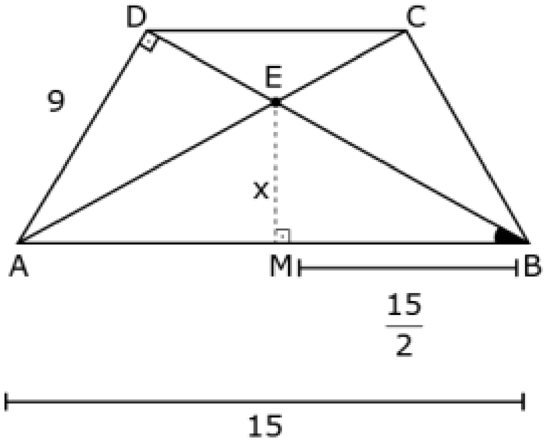
São colineares (F)

Questão 17	**Letra: E**

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

(A) $\frac{21}{8}$.
(B) $\frac{27}{8}$.
(C) $\frac{35}{8}$.
(D) $\frac{37}{8}$.
(E) $\frac{45}{8}$.

Solução:



$$\overline{DB}^2 = 15^2 - 9^2$$
$$\overline{DB} = 12$$

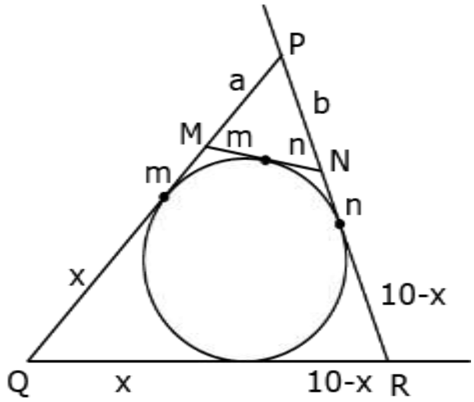
$ADB \sim EMB$

$$\frac{x}{15/2} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \frac{45}{8}$$

Questão 18	**Letra: A**

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a
(A) 5.
(B) 6.
(C) 8.
(D) 10.
(E) 15.

Solução:



$$2p(PQR) = 25$$
$$\overline{QR} = 10$$

$$a + m + \cancel{x} + \cancel{x} + 10 - \cancel{x} + 10 - \cancel{x} + n + b = 25$$
$$a + b + m + n = 5 \Rightarrow Perímetro(PMN) = 5$$

Questão 19	Letra: A

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r: x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O = (0,0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

(A) $(2, 2\sqrt{2} - 2)$ e $2\sqrt{2} - 2$.

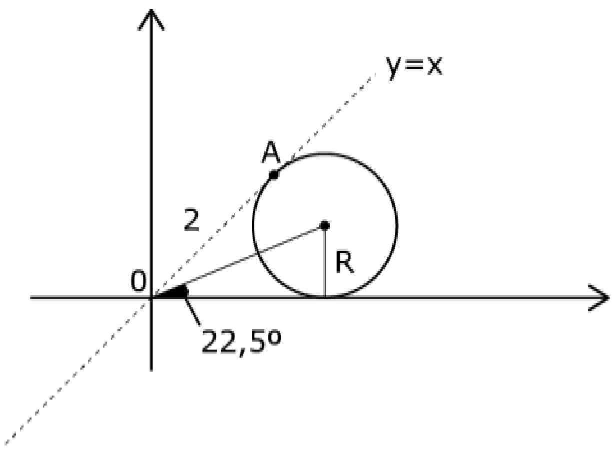
(B) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

(C) $(2, \sqrt{2} - 1)$ e $\sqrt{2} - 1$.

(D) $(2, 2 - \sqrt{2})$ e $2 - \sqrt{2}$.

(E) $(2, 4\sqrt{2} - 4)$ e $4\sqrt{2} - 4$.

Solução:



$$Pot = \overline{OA}^2 = 4 \rightarrow \overline{OA} = 2$$
$$\frac{R}{2} = tg\,22,5º$$
$$R = 2.\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$
$$\boxed{R = 2.\left(2\sqrt{2} - 2\right)}$$

$$CENTRO : \left(2 - 2\sqrt{2} - 2\right)$$

Questão 20	**Letra: C**

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

(A) $\sqrt[3]{2} - h$.

(B) $\sqrt[3]{2} - 1$.

(C) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$.

(D) h.

(E) $\dfrac{h}{2}$.

Solução:

$$\frac{2v}{v} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \boxed{H = h.\sqrt[3]{2}}$$

$$H - h = h\sqrt[3]{2} - h = h.\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$$

Questão 21	

Considere as funções $f_1, f_2, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

(A) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.

(B) O menor valor assumido pela função f.

(C) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Solução:

(a)

$$f_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + 3, x < 0 \\ \dfrac{x}{2} + 3, x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}, x > -1 \\ \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}, x \geq -1 \end{cases}$$

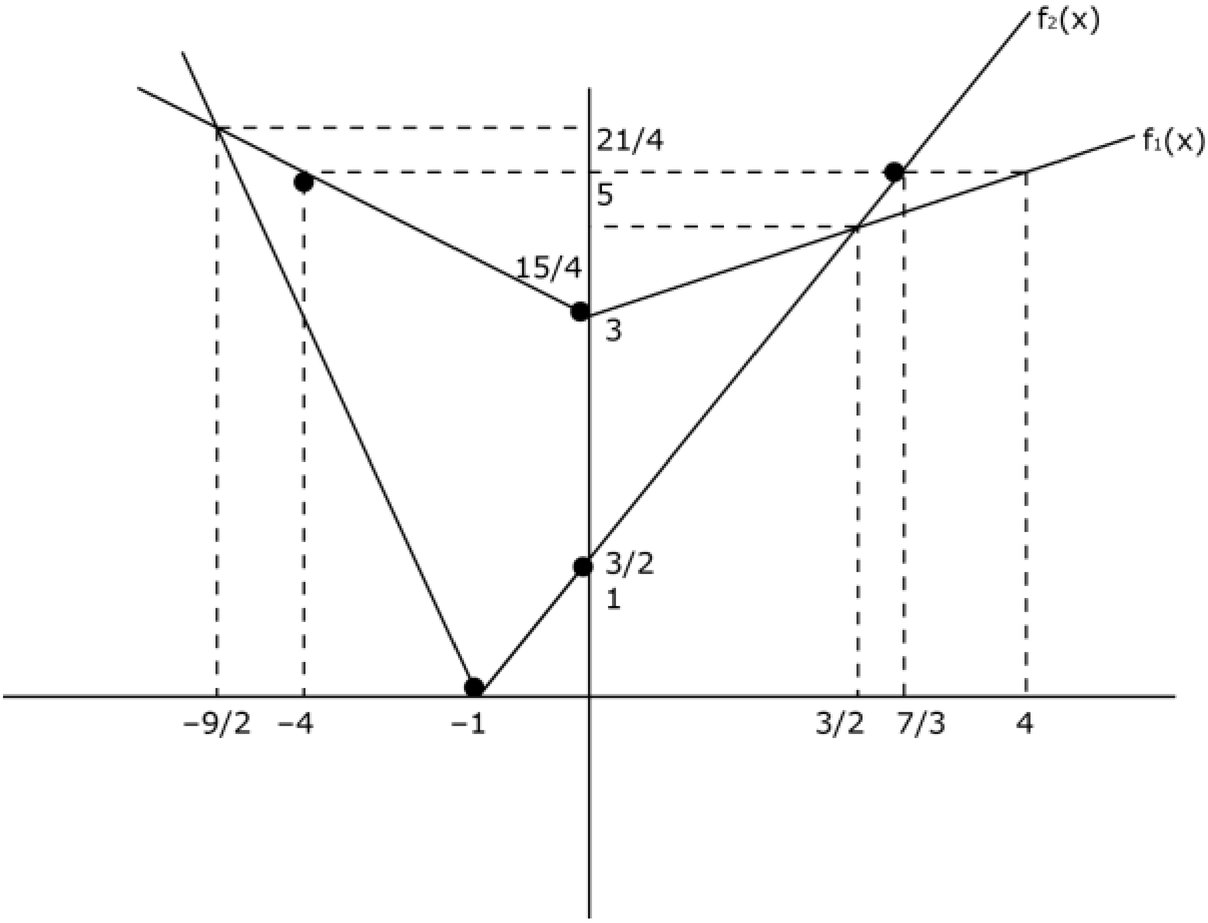
(i) $\boxed{x < -1}$ $f_1(x) = f_2(x) \leftrightarrow -\frac{x}{2} + 3 = -\frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \leftrightarrow \boxed{x = -\frac{9}{2}}$

(ii) $\boxed{-1 \leq x < 0}$ $f_1(x) = f_2(x) \leftrightarrow -\frac{x}{2} + 3 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \leftrightarrow 2x = \frac{3}{2} \leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ (não serve)

(iii) $\boxed{x \geq 0}$ $f_1(x) = f_2(x) \leftrightarrow -\frac{x}{2} + 3 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \leftrightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

(b)

$f(x) = \max\{f_1(x); f_2(x)\}$



$x < -\frac{9}{2}$ $f(x) = f_2(x)$

$-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ $f(x) = f_1(x)$

$f > \frac{3}{2}$ $f(x) = f_2(x)$

Logo o menor valor de $f(x)$ *é* $\underline{3}$, obtido para $x = 0$, ou seja $f(o) = 3$ é o mínimo de $f(x)$.

(c)

Pelo gráfico, $f(x) = 5 = \frac{20}{4}$ quando:

$f_1(x) = 5 \leftrightarrow \dfrac{|x|}{2} + 3 = 5 \leftrightarrow |x| = 4 \leftrightarrow \boxed{x = -4}$ ou $x = 4$ (não serve)

$f_2(x) = 5 \leftrightarrow \dfrac{3}{2}|x+1| = 5 \leftrightarrow |x+1| = \dfrac{10}{3} \leftrightarrow x = -3$ ou $x = 4$ (não serve) ou $\boxed{x = \dfrac{7}{3}}$

Questão 22

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

(A) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

(B) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Solução:

(a) Seja $z_1 = a + bi$ uma raiz $\rightarrow z_2 = a - bi$ é raiz; $\begin{matrix} a^2 + b^2 = 1 \\ b \neq 0 \end{matrix}$

$$S_3 = P = (a+bi)(a-bi)z_3 = (a^2+b^2)z_3 = \frac{\beta}{18}$$

Logo $z_3 = \dfrac{\beta}{18}$ é raiz

$$P\left(\frac{\beta}{18}\right) = \frac{18 \cdot \beta^3}{18^3} + \beta \cdot \frac{\beta^2}{18^2} - 7\frac{\beta}{18} - \beta = 0$$

$$2 \times \frac{\beta^3}{18^2} - 25\frac{\beta}{18} = 0 \Rightarrow \underset{\text{(n serve)}}{\boxed{\beta = 0}} \quad \text{ou} \quad \frac{2\beta^2}{18} = 25$$

$$\beta^2 = 9 \times 25$$

$$\boxed{\beta = \pm 15}$$

$$\beta = 0 \Rightarrow P(z) = 18z^3 - 7z = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = \dfrac{\pm\sqrt{7}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\pm\sqrt{14}}{6} \end{matrix}$$

n serve, pois não possui raiz complexa com parte imaginável não nula.

$\beta = 15 \Rightarrow P(z) = 18.z^3 + 15z^2 - 7z - 15 = 0$

$z_3 = \dfrac{\beta}{18} = \dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6}$ é raiz

	18	15	-7	-15
$\frac{5}{6}$	18	30	18	0

$18z^2 + 30z + 18 = 0$

$3z^2 + 5z + 3 = 0$

$\Delta = 25 - 36 = -11$

$$z_1 = \frac{-5}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

$$z_2 = \frac{-5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Questão 23	

Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:
(i) B, C, D, E são dois a dois distintos;
(ii) os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
(iii) os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.
Determine B, C, D, E.

Solução:

$$\begin{cases} 2B = C + 1 \;\rightarrow\; C = 2B - 1 \\ 2C = E + 1 \;\rightarrow\; E = 2(2B-1) - 1 \;\therefore\; E = 4B - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{C}{B} = q \\ \dfrac{E}{B} = q^3 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2B-1}{B}\right) = \frac{4B-3}{B}$$

$8B^3 - 12B^2 + 6B - 1 = 4B^3 - 3B^2$
$4B^3 - 9B^2 + 6B - 1 = 0$

	4	– 9	6	– 1
1	4	– 5	1	0
1	4	– 1	0	

Logo $B = 1 \rightarrow C = 1$; $E = 1$ (não serve)
ou
$B = \frac{1}{4} \rightarrow C = -\frac{1}{2}; E = -2$
$q = -2 \Rightarrow D = 1$

Resposta: $B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2.$

Questão 24	

Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C}\ e\ |z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

Solução:

Seja $z = \text{cis}\,\theta \Rightarrow z^2 + az - 1 = \text{cis}\,2\theta + a\,\text{cis}\,\theta - 1 = -\frac{2}{i}\,\text{sen}\,\theta\,\text{cis}\,\theta + a\,\text{cis}\,\theta$

$|z^2 + az + 1| = |(a - \frac{2}{i}\,\text{sen}\,\theta)\text{cis}\,\theta| = |a - \frac{2}{i}\,\text{sen}\,\theta| = |-2\text{sen}\theta + ai| = \sqrt{a^2 + 4\text{sen}^2\theta}$

Valor máximo = $\sqrt{a^2+4}$

Questão 25	

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

(A) Determine o número de elementos de S.
(B) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm −1 como uma de suas raízes.

Solução:
(A) Coeficiente: 2, 2, 2, 1, 1

nº de polinômios = $P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$

(B)

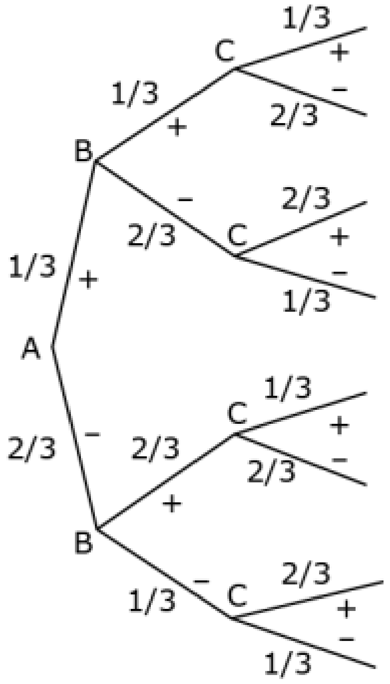
$$P(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$
$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$$
$$a_0 + a_2 + a_4 = a_1 + a_3$$

As únicas soluções são: 1 + 1 + 2 = 2 + 2
Logo,
Para
$a_1 = a_3 = 2 \quad temos$
$a_0 = z,\ a_2 = 1,\ a_4 = 1 \Rightarrow P(z) = 2z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0$
$a_0 = 1,\ a_2 = 2,\ a_4 = 1 \Rightarrow P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$
$a_0 = 1,\ a_2 = 1,\ a_4 = 2 \Rightarrow P(z) = z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$
Total de 3 casos.

Questão 26

Três pessoas, aqui designadas por *A*, *B* e *C*, realizam o seguinte experimento: *A* recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal de + ou −, passando em seguida a *B*, que mantém ou troca o sinal marcado por *A* e repassa o cartão a *C*. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo 1/3 a probabilidade de *A* escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidades de *B* e *C* rocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de *A* haver escrito o sinal + sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Solução:
São 3 escolhas sucessivas: A, B e C, com o seguinte diagrama em árvore.



O resultado final positivo corresponde aos ramos assinalados de probabilidade total 13/27 (redução do espaço amostral). Apenas os dois ramos superiores, de probabilidade total 5/27, correspondem ao valor (+) na primeira escolha (A). Logo, a probabilidade solicitada vale;

$$p = \frac{5/27}{13/27} = \frac{5}{13} \quad \left(\frac{\text{casos de interesse}}{\text{total de casos}}\right)$$

Questão 27

Seja n um inteiro positivo tal que $sen\frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

(A) Determine n.

(B) Determine $sen\frac{\pi}{24}$.

Solução:

a)

$$sen\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = sen\frac{\pi}{12}$$

$$sen\frac{\pi}{2n} = sen\frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \boxed{n=6}$$

b) Temos que:

$$\cos 2x = 1 - 2sen^2 x \Leftrightarrow sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow sen\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{\pi}{24}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$sen\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}} \Leftrightarrow sen\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{sen\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}$$

Questão 28

Sejam α e β números reais nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases} \qquad T\begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

Solução:
Para que o sistema seja indeterminado as equações devem possuir uma proporcionalidade entre os coeficientes, uma vez que b e c obviamente não podem ser nulos visto que não são coeficientes da mesma variável e α e β não são nulos pelo enunciado.

$$S:\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{b} = \frac{c}{2} \Rightarrow \begin{cases} bc = 2 \\ \underline{\alpha = b\beta} \end{cases}$$

$$T:\begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{3} = \frac{4}{c} \Rightarrow \begin{cases} cd = 12 \\ 4\alpha = c\beta \Leftrightarrow \underline{\alpha = \frac{c}{4}\beta} \end{cases}$$

$$b = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{c}{4}.c = 2 \Leftrightarrow c^2 = 8 \Leftrightarrow \boxed{c = \pm 2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$d = \frac{12}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{d = \pm 3\sqrt{2}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = b \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Questão 29

Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Solução:

$$3x^2 + x.(5y - 3) - 2y^2 + 8y - 6 = 0$$

$$\Delta = (5y - 3)^2 - 4.3.(-2y^2 + 8y - 6)$$

$$\Delta = 25y^2 - 30y + 9 + 24y^2 - 96y + 72$$

$$\Delta = 49y^2 - 126y + 81$$

$$\Delta = (7y - 9)^2$$

$$x = \frac{-(5y - 3) \pm (7y - 9)}{2\,.\,3}$$

$$x = \frac{-5y + 3 + 7y - 9}{6} = \frac{y}{3} - 1 (r)$$

$$x = \frac{-5y + 3 - 7y + 9}{6} = -2y + 2 (s)$$

$$r : y = 3x + 3 \qquad m_r = 3$$

$$s : y = \frac{-1}{2}x + 1 \qquad m_s = \frac{-1}{2}$$

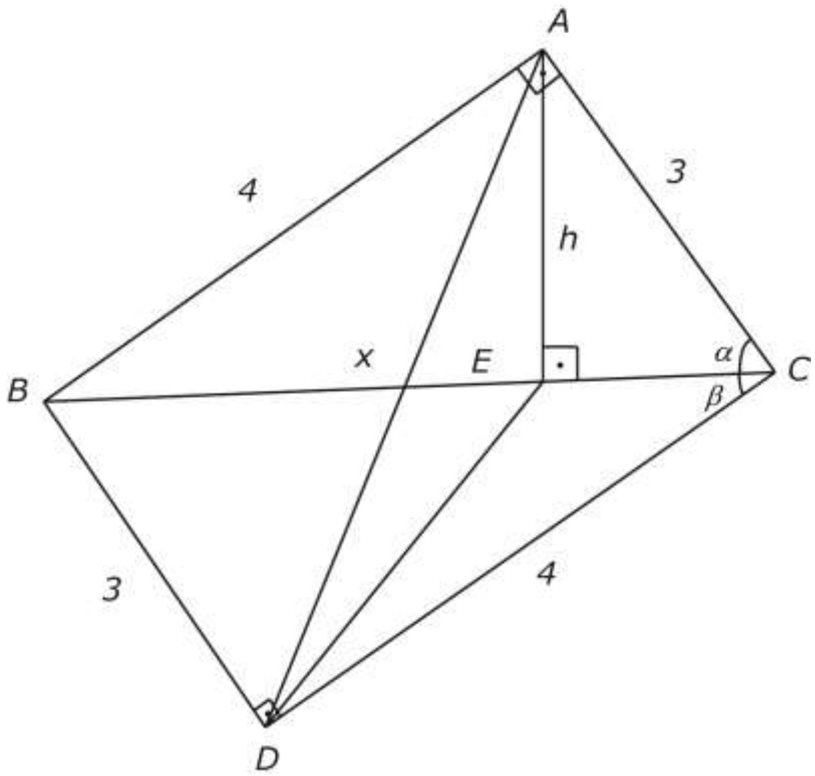
$$tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \frac{3 + 1/2}{1 + 3\,.\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{7/2}{1/2} = 7$$

$$tg\theta = 7$$

Questão 30	

Na construção de um tetaedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3cm e 4cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces d tetaedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces do tetaedro. Obtenha as medidas das arestas do tetaedro.

Solução:



Queremos encontrar $x = AD$. Sejam $\alpha = \measuredangle BCA$, $\beta = \measuredangle BCD$ e $h = AE$, onde E é a projeção ortogonal de A em BC. Do triângulo retângulo ABC, temos $4 \times 3 = h \times 5 \Rightarrow h = \dfrac{12}{5}$.

Temos $CE = 3 \cdot \cos\alpha = \dfrac{9}{5}$.

Aplicando Lei dos Cossenos no triângulo EDC, temos

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cos\beta \Rightarrow DE^2 = \frac{81}{25} + 16 - 2 \cdot \frac{9}{5} \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{193}{25}$$

Aplicando Pitágoras em ADE, temos

$$x^2 = DE^2 + h^2 = \frac{144}{25} + \frac{193}{25} = \frac{337}{25} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{337}}{5}$$

Logo as medidas das arestas são 3, 4, 5 e $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$.