COMENTÁRIO DA PROVA

01. O polinômio P(x) = $x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

Solução:

Agrupando dois a dois os termos do polinômio, temos:
$x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243 = x^4(x-3) + 10x^3(x-3) + 81x(x-3)$
Logo:
$P(x) = (x-3)(x^4 + 10x^2 + 81)$.
Resolvendo a equação biquadrada:
$x^4 + 10x^2 + 81 = 0$, fazendo y = x^2, $y^2 + 10y + 81 = 0$,
Cujas raízes são: $-5 \pm 2\sqrt{14}i$
Tomemos a e b $\in \mathbb{R}$ tais que:
$(a+bi)^2 = -5 + 2\sqrt{14}i$
$a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 2\sqrt{14}i$, logo:
$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2b^2 = 14 \end{cases}$, logo
$a^2 = 7$ e $b^2 = 2$,
De onde temos as seguintes soluções para a equação biquadrada:
$\{\sqrt{2} + \sqrt{7}i, \sqrt{2} - \sqrt{7}i, -\sqrt{2} + \sqrt{7}i, -\sqrt{2} - \sqrt{7}i\}$
Para conjunto solução do polinômio teremos:
$\{3, \sqrt{2} + \sqrt{7}i, \sqrt{2} - \sqrt{7}i, -\sqrt{2} + \sqrt{7}i, -\sqrt{2} - \sqrt{7}i\}$

---

02. Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = cis\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

Solução:

$\omega = cis\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega^3 = cis2\pi = 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

Substituindo a 3ª coluna por ela mais a 1ª coluna, obtemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & 1 & i \\ i & 1 & 0 & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

Substituindo a 4ª linha por ela menos a 1ª linha obtemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & 1 & i \\ i & 1 & 0 & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na 3ª coluna, temos:

$$\Delta = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} i & 1 & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \omega^3 = 0 \ \left(pois\ \omega^3 = 1 \right)$$

---

03. Determine o(s) valor(es) de x, inteiro(s) e positivo(s), que satisfaz(em) a equação

$$x^2 = \sum_{y=1}^{x} \left[\prod_{z=0}^{y-1} (y-z) \right]$$

Solução:

$$\prod_{z=0}^{y-1} (y-z) = y.(y-1).(y-2)....1 = y!$$

$$\Rightarrow \sum_{y=1}^{x} \left[\prod_{z=0}^{y-1} (y-z) \right] = \sum_{y=1}^{x} y! = 1! + 2! + 3! + \ldots + x!$$

Queremos resolver a equação $x^2 = 1! + 2! + 3! + \ldots + x!$

Supondo $x \geq 5$ temos:

$$x^2 = \sum_{y=1}^{x} y! = 1! + 2! + 3! + 4! + \sum_{y=5}^{x} y! = 33 + 10k$$

x^2 termina em 3 o que é IMPOSSÍVEL. Logo, $x \leq 4$.

(a) $x = 1 \Rightarrow 1^2 = \sum_{y=1}^{1} y! = 1!$ (V)

(b) $x = 2 \Rightarrow 2^2 = \sum_{y=1}^{2} y! = 1! + 2! = 3$ (F)

(c) $x = 3 \Rightarrow 3^2 = \sum_{y=1}^{3} y! = 1! + 2! + 3! = 9$ (V)

(d) $x = 4 \Rightarrow 4^2 = \sum_{y=1}^{4} y! = 1! + 2! + 3! + 4! = 33$ (F)

Resposta: $x = 1\ ou\ x = 3$

04. Resolva a equação $(\log_{\cos x} sen^2 x).(\log_{\cos^2 x} sen\, x) = 4$

Solução:

Analisando as restrições para que a equação esteja bem definida, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{array}\right| \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(1º quadrante)}$$

Voltando à equação, temos:

$$(2.\log_{\cos x} \text{sen}x).\left(\frac{1}{2}.\log_{\cos x} \text{sen}x\right) = 4 \Leftrightarrow (\log_{\cos x} \text{sen}x)^2 = 4 \Leftrightarrow (\log_{\cos x} \text{sen}x) = \pm 2$$

1º Caso:

$$(\log_{\cos x} \text{sen}x) = 2 \Rightarrow \text{sen}x = \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \; ou \; \text{sen}x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

Esta última não serve pois sen$x$ > 0. Portanto $x = 2k.\pi + \text{arcsen}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ $k \in \mathbb{Z}$.

2º Caso:

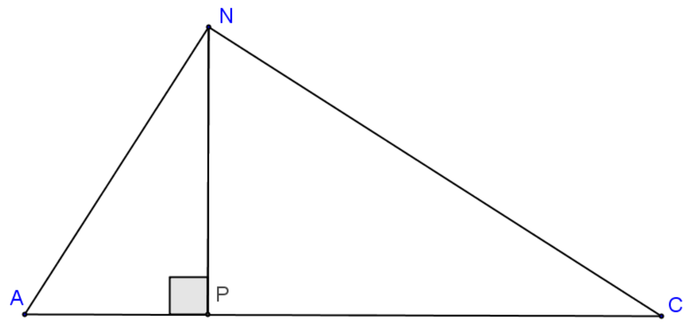
$(\log_{\cos x} \text{sen}x) = -2 \Rightarrow \text{sen}x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, mas $0 < \text{sen}x < 1$ e $\dfrac{1}{\cos^2 x} > 1$, logo, não temos solução nesse caso.

---

05. Seja *ABCDA'B'C'D'* um prisma reto de base retangular *ABCD*. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal *AC*, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto *N*. Sabe-se que $\left|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2\right| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

Solução:

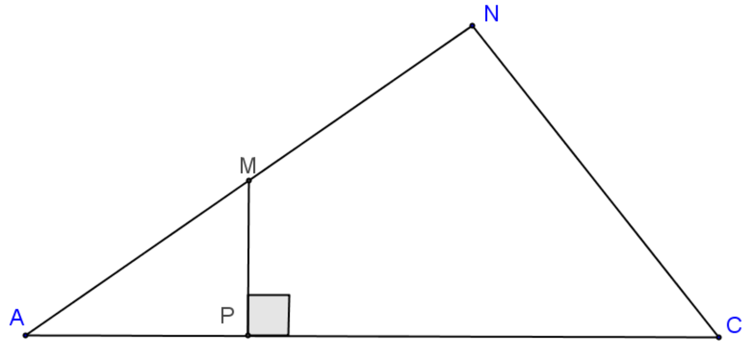
Olhando para o triângulo *ANC*, temos:



$$\left|\overline{AN}^2 - \overline{NC}^2\right| = \left|\overline{NP}^2 + \overline{AP}^2 - \left(\overline{NP}^2 + PC^2\right)\right| = \left|\overline{AP}^2 - PC^2\right| = |\,\overline{AP} - \overline{PC}\,|\,(\overline{AP} + \overline{PC}),$$

Logo $k = \left|\overline{AP} - \overline{PC}\right|.\overline{AC}$

Agora olhemos para o triângulo ABC



Vemos que $\Delta ABC \approx APM$, temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AB}^2}{2\,\overline{AC}},$$

E como $\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP}$, temos:

$$\left|\overline{AP} - \overline{PC}\right| = \left|2\,\overline{AP} - \overline{AC}\right| = \left|\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}} - \overline{AC}\right|, \text{ Então}$$

$$k = \left|\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}} - \overline{AC}\right|.\overline{AC} = \left|\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2\right| = \overline{BC}^2, \text{ De onde tiramos:}$$

$\overline{BC} = \sqrt{k}$.

---

06. Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ algarismos}} - \underbrace{11\ldots1}_{30\text{ algs "1"}}\underbrace{00\ldots0}_{30\text{ algs "0"}}}$$

obs.: algs = algarismos

Solução:

$$A = \overbrace{037}^{30°}\overbrace{037}^{29°}\overbrace{037}^{28°}\ldots\overbrace{037}^{1°} = 37 + 37.10^3 + 37.10^6 + \ldots + 37.\left(10^3\right)^{29} \Rightarrow$$

$$A = \frac{37.\left[\left(10^3\right)^{30} - 1\right]}{10^3 - 1} = \frac{10^{90} - 1}{27}.$$

$$B = \overbrace{111\ldots1}^{30\ Algs}\overbrace{000\ldots0}^{30\ Algs} = \left[1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{29}\right].10^{30} = \frac{1.\left[10^{30} - 1\right]}{10 - 1}.10^{30} \Rightarrow$$

$$B = \frac{10^{60} - 10^{30}}{9}.$$

$$\sqrt[3]{A-B}=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{10^{60}-10^{30}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-3.10^{60}+3.10^{30}-1}{27}}=\sqrt[3]{\frac{\left(10^{30}-1\right)^3}{27}}\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{A-B}=\frac{10^{30}-1}{3}=\overbrace{333...3}^{30\ Algs\ "3"}.$$

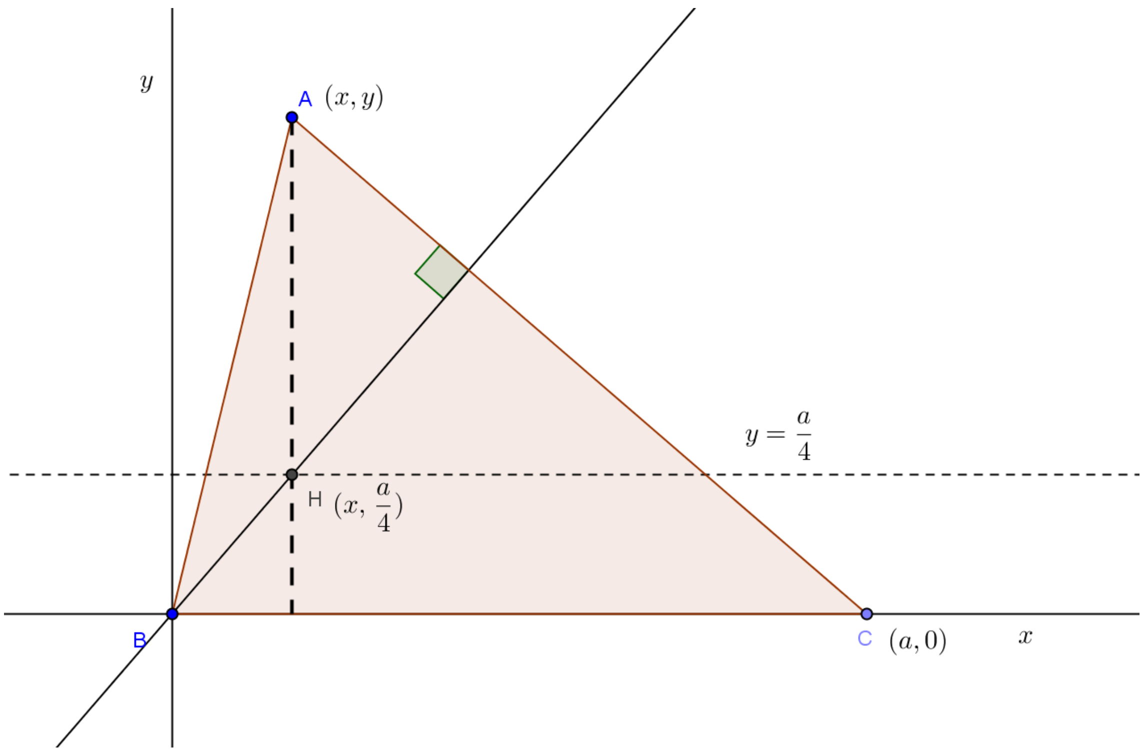
07. O lado BC de um triângulo ABC é fixo e tem comprimento a. O ortocentro H do triângulo percorre uma reta paralela à reta suporte de BC e distante $a4$ da mesma.

a) Determine o lugar geométrico do ponto A quando H varia.

b) Determine o valor mínimo da área do triângulo ABC quando A e H estão no mesmo semi-plano definido pela reta suporte de BC.

Solução:

a) Considere um sistema de eixos cartesianos com origem em B e eixo x sobre o lado $\overline{BC}$.
Temos que $B(0,0)$, $C(a,0)$, $H\left(x,\frac{a}{4}\right)$ e $A(x,y)$.



Observe que os vetores $\overrightarrow{BH}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais, logo

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\left(x,\frac{a}{4}\right).(a-x,-y)=0\Leftrightarrow ax-x^2-\frac{ay}{4}=0 \text{ e } x\neq 0 \text{ e } x\neq a.$$

$\Leftrightarrow y=-\frac{4}{a}x^2+4x\ (*)$, $x\in\mathbb{R}-\{0,a\}$. Assim, o lugar geométrico é a parábola descrita pela equação (*), excetuando-se os pontos B e C.

b) A função área será

$$A(x)=\frac{a.|y|}{2}=\frac{a}{2}\left|-\frac{4}{a}x^2+4x\right|=\left|-2x^2+2ax\right|$$

Para A e H no mesmo semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, temos que $x \in (0, a)$ e esta admite valor máximo quando $x = \frac{a}{2}$, $A_{máx} = \frac{a^2}{2}$.
Contudo, não admite valor mínimo.

---

08. Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode ser organizar para fazer o teste?
(Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode ser organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas)

Solução 1:

Existem as seguintes hipóteses:

0 duplas de alunos: 1 maneira.

1 dupla de alunos: C_9^2 = 36 maneiras.

2 duplas de alunos: $\frac{C_9^2 x C_7^2}{2!} = \frac{9x8x7x6}{2x2x2} = 42x9 = 378$ maneiras.

3 duplas de alunos: $\frac{C_9^2 x C_7^2 x C_5^2}{3!} = \frac{9x8x7x6x5x4}{2x2x2x6} = 1260$ maneiras.

4 duplas de alunos: $\frac{C_9^2 x C_7^2 x C_5^2 C_3^2}{4!} = \frac{9x8x7x6x5x4x3x2}{2x2x2x2x24} = 945$ maneiras.

Total = 1 + 36 + 378 + 1260 + 945 = 2620 maneiras.

Solução 2:

Seja X_n o número de maneiras de organizar a turma com η pessoas para fazer o teste. Temos que $X_3 = 4$ e $X_4 = 10$.
Por outro lado, o enésimo aluno pode fazer a prova sozinho ou em dupla, portanto

$$X_n = \underbrace{X_{n-1}}_{\boxed{\text{Se ele fizer a prova sozinho.}}} + \underbrace{(n - 1).\,X_{n-2}}_{\boxed{\text{Se ele fizer a prova em dupla.}}}$$

Como $X_3 = 4$ e $X_4 = 10$

$X_5 = 10 + 4x4 = 26$

$X_6 = X_5 + 5X_4 = 26 + 5x10 = 76$

$X_7 = X_6 + 6X_5 = 76 + 6x26 = 232$

$X_8 = X_7 + 7X_6 = 232 + 7x76 = 764$

$X_9 = X_8 + 7X_7 = 764 + 8x232 = 2620$

Concluímos que há 2620 maneiras de organizar a turma de 9 alunos para fazer o teste.

09. Resolver o sistema de equações $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5.4^y \end{cases}$

Solução:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 {}^{y}\!/_{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5.4^y \end{cases}$$

$$\overbrace{\sqrt{x} - \sqrt{y}}^{A} = \overbrace{\log_3 y - \log_3 x}^{B} \Rightarrow \begin{cases} x > y \Rightarrow A > 0 \ e \ B < 0 \Rightarrow A \neq B \\ x < y \Rightarrow A < 0 \ e \ B > 0 \Rightarrow A \neq B \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y \left(A = B = 0\right)$$

$$\Rightarrow 2^{x+2} + 2^{3x} = 5.2^{2x} \Rightarrow 2^{3x} - 5.2^{2x} + 4.2^x = 0$$

$$2^x = z \Rightarrow z^3 - 5z^2 + 4z = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \left(impossível\right) \\ z = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \left(impossível\right) \\ z = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{\left(2,2\right)\right\}$$

---

10. Sejam p o semiperímetro de um triângulo, S sua área, r e R os raios de suas circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente. Demonstre que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} S \leq r.R \leq \frac{2p^2}{27}$$

Solução:

Sejam a, b, c as medidas dos lados do triângulo. Pela desigualdade das médias (a, b, c positivos), temos,

$$\frac{2p}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{8p^3}{27} \geq abc \Rightarrow \frac{2p^2}{27} \geq \frac{abc}{4p} = \frac{abc}{4R}.\frac{1}{rp}.rR = S.\frac{1}{S}.rR = rR$$

Assim, $rR \leq \dfrac{2p^2}{27}$ (1).

Sejam agora, A, B, C as medidas dos ângulos internos do triângulo, em radianos. Pela lei dos senos, temos,

$$2p = a + b + c = 2R(\text{senA} + \text{senB} + \text{senC})$$

Como $A, B, C \in]0, \pi[$ e a função f(x) = senx é côncava em $]0, \pi[$, pela desigualdade de Jensen,

$$\frac{\text{senA+senB+senC}}{3} \leq \text{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}S = \frac{2\sqrt{3}}{9}(\text{pr}) = \text{r}.\frac{\sqrt{3}}{3}.\left(\frac{2p}{3}\right) = \text{r}.\frac{\sqrt{3}}{3}.2R\left(\frac{\text{senA+senB+senC}}{3}\right) \le$$

$$\le \text{r}.\frac{\sqrt{3}}{3}.2R.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = rR$$

ou seja, $\frac{2\sqrt{3}}{9}S \le rR$ (2). Desta forma (1) e (2) provam que

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}S \le rR \le \frac{2p^2}{27}.$$

Componentes:

1. Luciano Castro
2. Marcelo Xavier
3. Ricardo Secco
4. Arnaldo Junior
5. Renato Madeira
6. Gilberto Gil
7. Rafael Sabino
8. Haroldo
9. André Felipe
10. Rodrigo Menezes
11. Jean Pierre
12. Ravi Ramos