GABARITO ITA – 2013/2014

01.	E
02.	E
03.	D
04.	A
05.	E
06.	C
07.	D
08.	C
09.	B
10.	A
11.	B
12.	A
13.	E
14.	C
15.	D
16.	A
17.	B
18.	C
19.	D
20.	C

GABARITO COMENTADO – MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\overline{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$P(A)$: probabilidade de ocorrência do evento A

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$A \backslash B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f: [a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e II. B ( ) apenas I e III. C ( ) apenas II e III.

D ( ) apenas III. E ( ) nenhuma.

Questão 2. Considere as funções $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + m$, $g(x) = bx + n$, em que a, b, m e n são constantes reais. Se A e B são as imagens de f e de g, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se $A = B$, então $a = b$ e $m = n$;

II. Se $A = \mathbb{Z}$, então $a = 1$;

III. Se $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, com $a = b$ e $m = -n$, então $A = B$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.

D ( ) apenas I e II. E ( ) nenhuma.

Questão 3. A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$ é igual a

A ( ) $\frac{8}{9}$. B ( ) $\frac{14}{15}$. C ( ) $\frac{15}{16}$. D ( ) $\frac{17}{18}$. E ( ) 1.

Questão 4. Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3|z|^4(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6$ é igual a

A ( ) $(z^2 - \overline{z}^2)^3$. B ( ) $z^6 - \overline{z}^6$. C ( ) $(z^3 - \overline{z}^3)^2$.

D ( ) $(z - \overline{z})^6$. E ( ) $(z - \overline{z})^2 (z^4 - \overline{z}^4)$.

Questão 5. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$;

II. $(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 = 4z\,\overline{w}$;

III. $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\,\overline{w})$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.

D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 6. Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

A ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$. B ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{5}{4}\right)$. C ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{5}{4}\right)$.

D ( ) $\left(\frac{5}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$. E ( ) $\left(\frac{1}{4},\ -1,\ -\frac{1}{4}\right)$.

Questão 7. Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

A ( ) $2^n + 1$. B ( ) $2^{n+1} + 1$. C ( ) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$. D ( ) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. E ( ) $\frac{2^n - 1}{n}$.

Questão 8. Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.

D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível ;

III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e II. B ( ) apenas II e III. C ( ) apenas I.

D ( ) apenas II. E ( ) apenas III.

Questão 10. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

A ( ) $\frac{1}{3}$. B ( ) $\frac{1}{2}$. C ( ) $\frac{2}{3}$. D ( ) $\frac{4}{5}$. E ( ) $\frac{5}{4}$.

Questão 11. Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

A ( ) $2\sqrt{2}, \quad 0, \quad -3\sqrt{2}.$ B ( ) $-2\sqrt{2}, \quad 0, \quad -3\sqrt{2}.$ C ( ) $0, \quad 3\sqrt{2}, \quad 2\sqrt{2}.$

D ( ) $0, \quad 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}.$ E ( ) $2\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3}, \quad 0.$

Questão 12. Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + a\,z^3 + 5\,z^2 - i\,z - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

A ( ) $-3i, \; -1, \; 1.$ B ( ) $-i, \; i, \; 1.$ C ( ) $-i, \; i, \; -1.$

D ( ) $-2i, \; -1, \; 1.$ E ( ) $-2i, \; -i, \; i.$

Questão 13. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\operatorname{cossec} 2x - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$ é

A ( ) $\dfrac{a-b}{ab}.$ B ( ) $\dfrac{a+b}{2ab}.$ C ( ) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}.$ D ( ) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}.$ E ( ) $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}.$

Questão 14. Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2} - 1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

A ( ) $4\sqrt{2} - 5.$ B ( ) $3 - \sqrt{2}.$ C ( ) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}.$ D ( ) $3(\sqrt{2} - 1).$ E ( ) $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}.$

Questão 15. Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1,4)$, $B = (5,1)$ e $C = (5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

A ( ) $\dfrac{15}{8}.$ B ( ) $\dfrac{5\sqrt{17}}{4}.$ C ( ) $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}.$ D ( ) $\dfrac{5\sqrt{17}}{8}.$ E ( ) $\dfrac{17\sqrt{5}}{8}.$

Questão 16. Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.

D ( ) apenas I e III. E ( ) apenas II e III.

Questão 17. Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a

A ( ) $x - y$. B ( ) $\frac{1}{2}(x-y)$. C ( ) $\frac{1}{3}(x-y)$. D ( ) $\frac{1}{3}(x+y)$. E ( ) $\frac{1}{4}(x+y)$.

Questão 18. Uma pirâmide de altura $h = 1\ cm$ e volume $V = 50\ cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, ..., n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}\ cm^2$ e $S_6 = 3\ cm^2$. Então n é igual a

A ( ) 22. B ( ) 24. C ( ) 26. D ( ) 28. E ( ) 32.

Questão 19. A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r: 2x - 2y + 5 = 0$ e $s: x + y - 4 = 0$ é

A ( ) $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.

B ( ) $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 = 4$.

C ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.

D ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{13}{4})^2 = 4$.

E ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = 4$.

Questão 20. Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0,25\ cm$ do vértice A e $0,75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

A ( ) $\frac{9}{16}$. B ( ) $\frac{13}{96}$. C ( ) $\frac{7}{24}$. D ( ) $\frac{9}{24}$. E ( ) $\frac{11}{96}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x).$$

Solução:

$(g \circ f)(x) = g(e^{\alpha x}) = \sqrt{e^{\alpha x}}$

$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = e^{\alpha\sqrt{x}}$

$\sqrt{e^{\alpha x}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \Rightarrow e^{\alpha x} > e^{2\alpha\sqrt{x}} \Rightarrow \alpha x > 2\alpha\sqrt{x}$

Como $\alpha > 0 \Rightarrow x > 2\sqrt{x}$

Fazendo $y = \sqrt{x}$, temos $y \geq 0$

$y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y < 0 \ \ ou \ \ y > 2 \Rightarrow$

$y > 2 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow \boxed{x > 4}$

Questão 22. Determine as soluções reais da equação em x, $\left(\log_4 x\right)^3 - \log_4(x^4) - 3\,\frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0.$

Solução:

$$\left(\log_4 x\right)^3 - 4\log_4 x - 3\,\frac{\log_{16} x}{\log_{100} 16} = 0$$

$$\begin{cases} \log 16x = \dfrac{\log_4 16x}{\log_4 10} = \dfrac{\log_4 16 + \log_4 x}{\log_4 10} = \dfrac{2 + \log_4 x}{\log_4 10} \\ \log_{100} 16 = \dfrac{\log_4 16}{\log_4 100} = \dfrac{2}{2\log_4 10} = \dfrac{1}{\log_4 10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\log 16x}{\log_{100} 16} = \frac{2 + \log_4 x}{\log_4 10}.\log_4 10 = 2 + \log_4 x$$

$$\left(\log_4 x\right)^3 - 4\log_4 x - 3\left(2 + \log_4 x\right) = 0 \Rightarrow \left(\log_4 x\right)^3 - 7\log_4 x - 6 = 0$$

$$y = \log_4 x \Rightarrow y^3 - 7y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 - y - 6\right) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y+2)(y-3) = 0 \Rightarrow$$

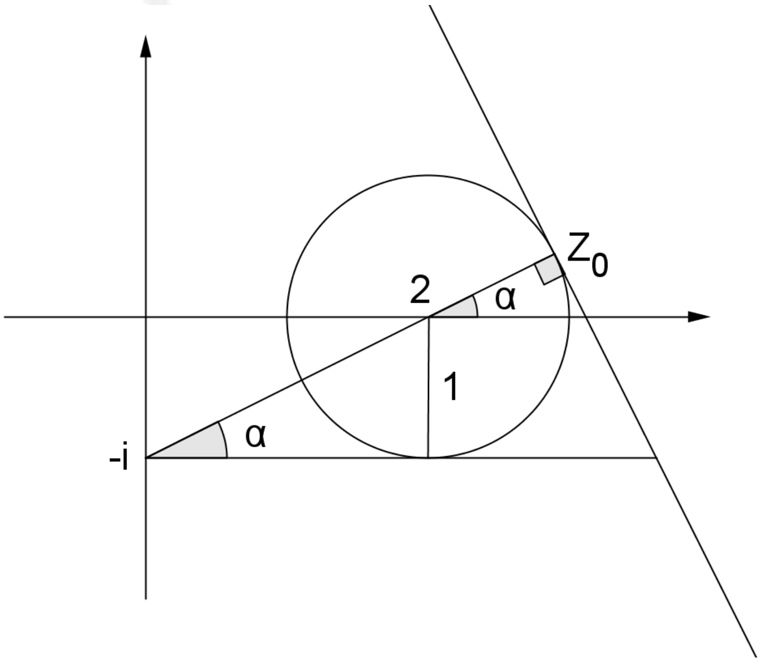
$$\begin{cases} y = -1 \\ y = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4 x = -1 \\ \log_4 x = -2 \\ \log_4 x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ x = 1/16 \\ x = 64 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 64\right\}}$$

Questão 23.

a) Determine o valor máximo de $|z+i|$, sabendo que $|z-2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

b) Se $z_o \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_o.

Solução:



A equação $|z-2|=1$ tem como soluções os afixos cuja distância até o afixo 2 vale 1, ou seja, um circunferência de centro em 2 e raio 1.

O valor $|z+i|$ representa a distância do afixo z ao afixo $-i$, logo o ponto da circunferência que maximiza esta distância é o ponto z_0 representado pela figura acima.

a) A distância entre o centro da circunferência e z_0 é 1(raio da circunferência), e a distância do afixo $-i$ até o centro é $\sqrt{5}$.

Assim a distância desejada é $1+\sqrt{5}$

b) Note que $z_0 = 2 + cis\alpha$, mas pelo triângulo retângulo da figura temos:

$sen\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, logo, $cis\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} + i\frac{\sqrt{5}}{5}$ e então:

$$z_0 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + i\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Questão 24. Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(A)$ e $n(B)$;

c) $P(A)$ e $P(B)$.

Solução:

Considerando os 3 dados diferentes:

a) $n(\Omega) = 6^3$

b) $n(A)$ = número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ exceto as que $x_i = 6$, isto é, $C_8^2 - 3 = 25$ casos.

$n(B)$ = número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, exceto as que $x_i = 6$ ou $x_i = 7$, isto é, $C_9^2 - 3 - 6 = 27$ casos

c)

$p(A) = \frac{25}{216}$

$p(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

Questão 25. Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

1ª Solução:

Possíveis valores das arestas: 1, 2,..., 10.

Paralelepípedos com 3 arestas distintas: $\binom{10}{3} = \frac{10.\cancel{9}.\cancel{8}}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 10.3.4 = 120$

Paralelepípedos com 3 arestas iguais: 10

Paralelepípedos com exatamente 2 arestas iguais:

$$\underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{escolha dos dois valores de aresta}} \cdot \underbrace{2}_{\text{escolha do valor que servirá para duas arestas}} = \frac{10.9}{\cancel{2}}.\cancel{2} = 90$$

Total: $120 + 10 + 90 = \boxed{220}$

2ª Solução:

Como há 3 valores para escolher basta encontrar o número de soluções inteiras não negativas de:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$$

Onde x_i é o número de vezes em que i foi escolhido para valor da aresta com $i \in \{1, 2...10\}$,

Logo há:

$$C^3_{10+3-1} = C^3_{12} = \frac{12.11.10}{3!} = 220$$

Questão 26. Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\operatorname{sen}\theta)\, y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta)\, y + 16z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Solução:

a) $SPI \Rightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & sen\theta & 4 \\ 2 & 1-\cos 2\theta & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & sen\theta & 4 \\ 2 & 2sen^2\theta & 16 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & sen\theta & 2 \\ 2 & 2sen^2\theta & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$8sen\theta - 2sen^2\theta + 4 - 2sen\theta - 4sen^2\theta + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-6sen^2\theta + 6sen\theta + 12 = 0 \Leftrightarrow sen^2\theta - sen\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{sen\theta = 2} \quad ou \quad sen\theta = -1 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

b)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 16z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ x + y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -y} \quad e \quad \boxed{z = 0}$$

Questão 27. Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2\,\mathrm{sen}^2\,x + \mathrm{sen}\,x - 1}{\cos x - 1} < 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\,x)\,\mathrm{cotg}\,x\,.$$

Solução:

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(senx + 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right)}{\cos x - 1} < 0$$

$$senx = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \;\; ou \;\; x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 2\pi$$

$$(senx + 1) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

$$\left(senx - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$(\cos x - 1) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(senx + 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right)}{(\cos x - 1)} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\quad (4)$$

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}\cot gx\right)\cot gx \Leftrightarrow tgx + \sqrt{3} < \cot gx + \sqrt{3}\cot g^2x \Leftrightarrow$$

$$tgx + \sqrt{3} < \frac{1}{tgx} + \frac{\sqrt{3}}{tg^2x} \Leftrightarrow tg^3x + \sqrt{3}tg^2x - tgx - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$tg^2x\left(tgx + \sqrt{3}\right) - \left(tgx + \sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(tg^2x - 1\right)\left(tgx + \sqrt{3}\right) < 0$$

$$tg^2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[\quad (1)$$

$$tgx + \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow tgx > -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[\quad (2)$$

$$\left(tg^2x - 1\right)\left(tgx + \sqrt{3}\right) < 0$$

Por (1) e (2)

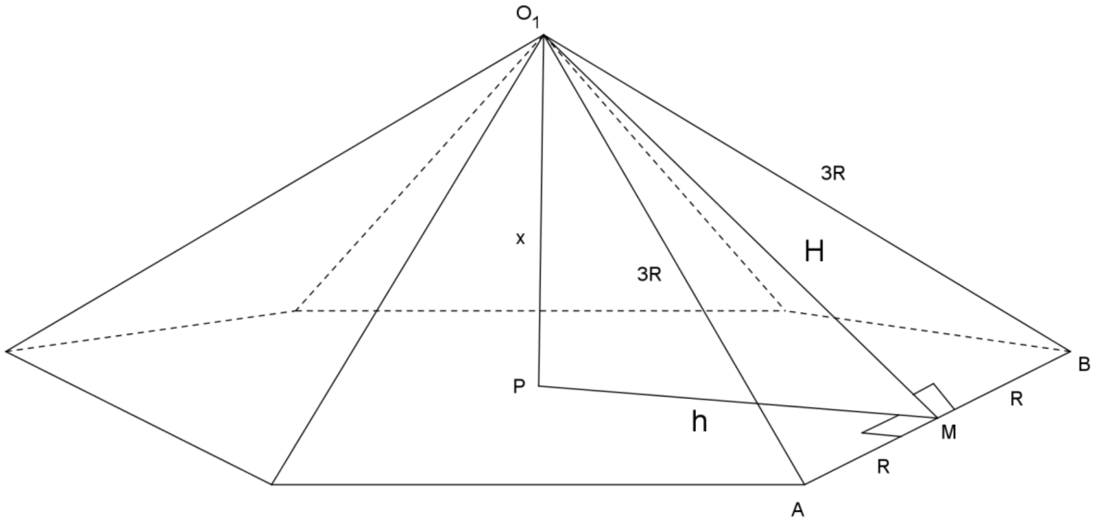
$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[\quad (3)$$

Por (3) e (4)

$$\boxed{x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[}$$

Questão 28. Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Solução:



Os centros das sete esferas formam uma pirâmide hexagonal representada pela figura acima, como as esferas são tangentes, a aresta da base mede 2R e as arestas laterais medem 3R.
Sejam A e B os centros de duas dessas esferas e M o ponto de tangência entre elas, seja ainda P o centro desse hexágono, H a altura do triângulo O_1AB relativa ao lado AB, h a altura do triângulo PAB relativa ao lado AB.
Como h é a apótema de um Hexágono regular de lado 2R, temos que:

$$h = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

Por Pitágoras em O_1MA:

$R^2 + H^2 = (3R)^2 \Leftrightarrow$

$H^2 = 8R^2 \Leftrightarrow$

$H = 2\sqrt{2}R$

Por Pitágoras em O_1PM:

$h^2 + x^2 = H^2 \Leftrightarrow$

$x^2 = 8R^2 - 3R^2 \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{5}R$

Este Hexágono está no plano dos centros das esferas, logo ele dista R à superfície Horizontal, logo a distancia pedida é dada pela soma entre o valor de x e de R:

$$D = R + \sqrt{5}R$$

Questão 29. Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Solução:

Sejam

$r, \frac{r}{3}\ e\ \frac{r}{9}$ os raios das circunferências, e a soma dos comprimentos define a seguinte equação:

$$2\pi r + 2\pi\frac{r}{3} + 2\pi\frac{r}{9} = 26\pi \Leftrightarrow$$

$$r = 9cm$$

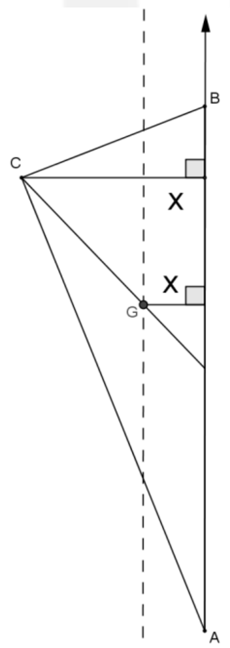
Logo os raios são 1cm, 3cm e 9cm.

a) O triângulo cujos vértices são os centros das circunferências possui para medida dos lados as somas dois a dois das medidas dos raios, ou seja, 4cm, 10cm e 12cm. E sua área é dada por radical de Heron, assim:

$$S = \sqrt{13(13-4)(13-10)(13-12)} \Leftrightarrow$$

$$S = 3\sqrt{39}$$

b)



Pelo teorema de Pappus-Guldin, temos:
$V = 2\pi \cdot x \cdot S$, onde x é a distancia do baricentro do triângulo ao eixo de rotação. Note que x também mede um terço da altura, portanto, a altura relativa ao lado AB mede $3x$, logo:

$$S = \frac{3x.12}{2} = 3\sqrt{39} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

Então: $V = 2\pi \cdot x \cdot S = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{39}}{6} \cdot 3\sqrt{39} = 39\pi$

Questão 30. Um cilindro reto de altura $h = 1\ cm$ tem sua base no plano xy definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0.$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

Solução:

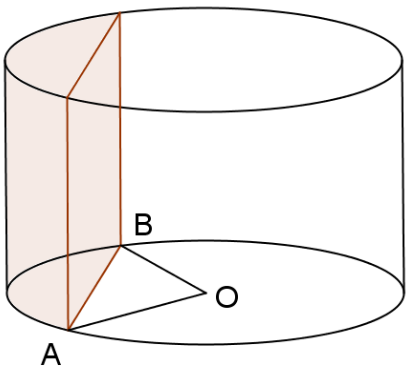
Completando quadrados temos:

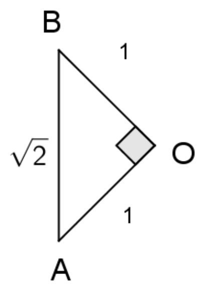
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

Que é um circulo de centro $(1,2)$ e raio 1. Fazendo a interseção entre a circunferência de mesmo raio e centro com a reta $y = x$, temos:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow$$
$$(x-1)^2 + (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 1 \ ou \ x = 2$$

Logo os pontos de interseção são os pontos $(1,1)\ e\ (2,2)$. Note que os pontos $A = (1,1), O = (1,2)\ e\ B = (2,2)$ formam um ângulo reto, dai temos.





O sólido é formado por um retângulo de base AB e altura 1, dois segmentos circulares de 90º e uma parte da área lateral do cilindro cujo perímetro da base é um quarto do perímetro da circunferência, logo sua área total é dada por:

$$S = \sqrt{2} \cdot 1 + 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$S = \sqrt{2} + \pi - 1$$

Equipe de Matemática:

André Felipe
Arnaldo Nascimento
Gandhi
Haroldo Filho
Jean Pierre
Rafael Sabino
Raphael Constant
Ricardo Secco
Thiago Esquian