MATEMÁTICA

Questão 1

Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

A= $(\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$
B= $\mathbb{Q} - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$
D= $(\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos A, B, e D, nesta ordem, é :

(A) -3; $0,5$ e $\frac{5}{2}$.

(B) $\sqrt{20}$; $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$.

(C) $-\sqrt{10}$; -5 e 2 .

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3 e $2,\overline{31}$.

Gabarito: Letra D

A= $(\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - \mathbb{Z} = \mathbb{I}$

B= $\mathbb{Q} - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}) = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}_{-}^{+}$

D= $(\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N}) = \mathbb{R}$

$-3 \notin A$; $\sqrt{10} \notin B$; e $-5 \notin B$
$\frac{\sqrt{3}}{2} \in A$; ¨$3 \in B$; $2,\overline{31} \in D$.

Questão 2

Considerando os números compexos z_1 e z_2, tais que:

- z_1 é a raiz cúbica de $8i$ que tem afixo no segundo quadrante;
- z_2 é raiz da equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e $Im(z_2) > 0$.

Pode-se afirmar que $|z_1 + z_2|$ é igual a:

(A) $2\sqrt{3}$.
(B) $3+\sqrt{3}$.
(C) $1+2\sqrt{2}$.
(D) $2+2\sqrt{2}$.

Gabarito: Letra A.

$$z_1 = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8\ cis\ \pi/2} = 2\ cis\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2.$$

como $z_1 \in 2^{\underline{o}}$ Q: $z_1 = 2\ cis\ \dfrac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i \quad (k = 1)$

$x^4 + x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ ou $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 2i$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, como $Im(z_2) > 0 : z_2 = 2i$

$|z_1 + z_2| = |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}.$

Questão 3

A sequência $\left(x, 6, y, y + \dfrac{8}{3}\right)$ é tal, que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica.

Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é:

(A) $\dfrac{92}{3}$

(B) $\dfrac{89}{3}$

(C) $\dfrac{86}{3}$

(D) $\dfrac{83}{3}$

Gabarito: Letra C.

$$\left(6, y, y + \frac{8}{3}\right) PG \Rightarrow y^2 = 6\left(y + \frac{8}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 16 = 0 \Rightarrow y = 8 \text{ ou } y = -2$$

Como a sequência é crescente: $y = 8$

$(x, 6, y) = (x, 6, 8)\ PA \Rightarrow x = 4$

Somando: $4 + 6 + 8 + 8 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{86}{3}$

Questão 4

As raízes da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$ formam uma progressão geométrica.

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é igual a:

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) 3.

(C) $-\frac{3}{2}$.

(D) $-\frac{1}{3}$.

Gabarito: Letra D.

$\left(\frac{r}{q}, r, rq\right)$ raízes.

Por Girard: $r^3 = -\frac{54}{2} = -27$. Como r é raiz P (r) = 0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{2r^3} - ar^2 + b\cancel{r} + \cancel{54} = 0 \Rightarrow r = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}.$$

Logo, $r = -3$

Donde $\frac{a}{b} = \frac{-1}{3}$.

Questão 5

Num acampamento militar , serão instaladas três barracas: I, II, e III. Nelas serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado A e o soldado B, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III.

Se o soldado A deve ficar na barraca I e o soldado B **NÃO** deve ficar na barraca III, então o numero de maneiras distintas de distribuí-los é igual a:

(A) 560.

(B) 1.120.

(C) 1.680.

(D) 2.240.

Gabarito: Letra B

Total de casos (B pode estar na 3ª barraca):

$$C_{9,3} \cdot C_{6,3} \cdot C_{3,3} = \frac{9!}{6!\,3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 1.680$$

Casos em que B fica na 3ª barraca:

$$C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 560$$

Assim os casos pedidos são: 1.680 – 560 = 1.120.

Questão 6

Um dado cúbico tem três de suas faces numeradas com “0” duas com “1” e uma com “2”. Um outro dado, tetraédrico, tem duas faces numeradas com “0”, uma com “1” e uma com “2”. Sabe-se que os dados não são viciados.
Se ambos são lançados simultaneamente, a probabilidades de a soma do valor ocorrido na face superior do dado cúbico com o valor ocorrido na face voltada para baixo no tetraédrico ser igual a 3 é de:

(A) 12,5 %
(B) 16,6 %
(C) 37,5 %
(D) 67,5 %

Gabarito: Letra A

Casos Favoráveis $=\{\ (2,1)\ ,\ (1,2)\ ,(1,2)\}$

Casos Possíveis $= 6 \ .\ 4 = 24$

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{3}{24} = 12{,}5\%\ .$$

Questão 7

Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem n, bem como a matriz identidade I.
Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det\ (I\ .\ B^{-1}\ .\ A) = \dfrac{1}{3}$, então o $\det\left[3\ .\ (B^{-1}\ .\ A^{-1})^t\right]$ é igual a:

(A) $5\ .\ 3^n$.
(B) $\dfrac{3^{n-1}}{5^2}$.
(C) $\dfrac{3}{15}$.
(D) 3^{n-1}.

Gabarito: Letra B.

Pelo teorema de Binet, temos que $\det(A\ .\ B) = \det(A)$, para A e B matrizes quadradas de ordem **n.** Por propriedade de determinantes, segue que $\det(kA) = k^n \det A$, $k \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$, e que $\det(A^T) = \det A$.

Com isso, escrevemos:

$$\begin{cases} \det A = 5 \\ \det\ (I\, B^{-1} A) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \det I\ .\ \det(B^{-1})\ .\ \det A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(B^{-1}) = \frac{1}{15}.$$

Logo:

$$\det\ [3\ (B^{-1}\ .\ A^{-1})^t] = 3^n\ \det[(B^{-1}\ .\ A^{-1})^t] = 3^n\ \det(B^{-1}\ .\ A^{-1}) =$$

$$= 3^n\ \det(B^{-1})\ .\ \det(A^{-1}) = 3^n\ .\ \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3^{n-1}}{5^2}.$$

Questão 8

Irão participar do EPEMM, Encontro Pedagógico do Ensino Médio Militar, um Congresso de Professores das Escolas Militares, 87 professores das disciplinas de Matemática, Física e Química. Sabe-se que cada professor leciona apenas uma dessas três disciplinas e que o número de professores de Física é o triplo do número de professores de Química.

Pode-se afirmar que:

(A) se o número de professores de Química for 16, os professores de Matemática serão metade dos de Física.
(B) o menor número possível de professores de Química é igual a 3.
(C) o número de professores de Química será no máximo 21.
(D) o número de professores de Química será maior do que o de Matemática, se o de Química for em quantidade maior ou igual a 17.

Gabarito: Letra C.

Escrevendo como **x** a quantidade de professores de química, então:

QUÍMICA	FÍSICA	MATEMÁTICA
x	3x	87 – 4x

Analisando as opções:

- Se $x = 16 \Rightarrow 3x = 48$ e $87 - 4x = 23$. Portanto, o número de professores de matemática não é a metade do número de professores de física. (falsa)
- Todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero. Logo, a menor quantidade de professores de química é **zero**. (falsa)
- Para termos o maior valor de x, devemos ter:

  $$87 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{87}{4} \Leftrightarrow x \leq 21$$

  Logo, o maior x é 21. (verdadeira)
- Para que tenhamos mais professores de química do que de matemática, devemos ter:

  $$x > 87 - 4x \Leftrightarrow 5x > 87 \Leftrightarrow x > \frac{87}{5} \Leftrightarrow x \geq 18.$$

  Logo, devemos ter minimamente 18 professores de química. (falsa)

Questão 9

Sejam **a** e **b** dois números reais positivos.
As retas **r** e **s** se intercetam no ponto (a, b)

Se $\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in r$ e $\left(0, \frac{b}{2}\right) \in s$, então uma equação para a reta t, que passa por (0,0) e tem tangente do ângulo agudo formado entre r e s como coeficiente angular, é:

(A) $3abx + (2a^2 - b^2)y = 0$.
(B) $3bx - b(a^2 + b^2)y = 0$.
(C) $3ax - a(a^2 + b^2)y = 0$.
(D) $3abx - 2(a^2 + b^2)y = 0$.

Gabarito: Letra D

O coeficiente angular de uma reta *r* é dado por $\mu_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ em que A= (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B) são pontos de *r*. Logo:

1) Se r passa por (a,b) e ($\frac{a}{2}$,0) $\rightarrow \mu_r = \dfrac{0-b}{\frac{a}{2}-a} = \dfrac{2b}{a}$

2) Se r passa por (a,b) e (0, $\frac{b}{2}$) $\rightarrow \mu_s = \dfrac{\frac{b}{2}-b}{0-a} = \dfrac{b}{2a}$

Se θ é o ângulo entre *r* e *s*, então :

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{\mu_r - \mu_s}{1+\mu_r\mu_s}\right| = \left|\frac{\frac{2b}{a} - \frac{b}{2a}}{1+\frac{2b}{a}.\frac{b}{2a}}\right| = \frac{3ab}{2\,(a^2+b^2)}$$

Sendo *t* a reta que passa pela origem com coeficiente angular igual à tangente de θ, então:

$$t = y\,(\text{tg}\,\theta)\,s \Leftrightarrow y = \frac{3ab}{2\,(a^2+b^2)}x \Leftrightarrow 3abx - 2\,(a^2+b^2)y = 0$$

Questão 10

Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse de equação $x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0$ é correto afimar que:

(A) tem raio igual a 1.
(B) tangencia o eixo das abscissas.
(C) é secante ao eixo das ordenadas.
(D) intercepta a reta de equação.

Gabarito: Letra B.

$x^2 + 9y^2 - 8x - 54y = 88 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 9(y^2 - 6y + 9) - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + 9\,(y-3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x-4)^2}{9} + (y-3)^2 = 1}$. Daqui, $a = 3$ e $b = 1$.

Temos uma elipse de centro (4,3) e eixo maior $\underline{2a = 6}$. A menor circunferência que circunscreve a elipse tem diâmetro $2a = 6$ e centro (4,3)

Como a circunferência possui centro em (4,3) e raio 3, tal circunferência tangencia o eixo das abscissas.

Questão 11

Dois corredores partem de um ponto ao mesmo tempo e se deslocam da seguinte forma: o primeiro é tal, que sua velocidade y_1 é dada em função da distância **x** por ele percorrida através de

$$y_1 = \begin{cases} 4, \, se \, x \leq 200 \\ \dfrac{n}{200}x - \dfrac{n^2+n-8}{2}, \, se \, 200\,n < x \leq 200\,(n+1) \end{cases}$$

em que **n** varia no conjunto dos números naturais não nulos.

O segundo é tal que sua velocidade y_2 é dada em função da distância **x** por ele percorrida através de $y_2 = \dfrac{x}{100} + 4.$

Tais velocidades são marcadas em km/h, e as distâncias, em metros.

Assim sendo, ambos estarão à mesma velocidade após terem percorrido:

(A) 800 m.
(B) 900 m.
(C) 1.000 m.
(D) 1.100 m.

Gabarito:

Letra C.

Temos $y_1 = \begin{cases} 4, \, se \, x \leq 200 \\ \dfrac{n}{200}x - \dfrac{n^2+n-8}{2}, \, se \, 200\,n < x \leq 200\,(n+1) \end{cases}$ e $y_2 = \dfrac{x}{100} + 4.$

Para termos os dois corredores à mesma velocidade, podemos ter $\dfrac{x}{100} + 4 = 4$ e $x \leq 200 \Leftrightarrow x = 0$. Nesse caso, nenhum dos dois corredores percorreu uma distância.

No outro caso, temos:

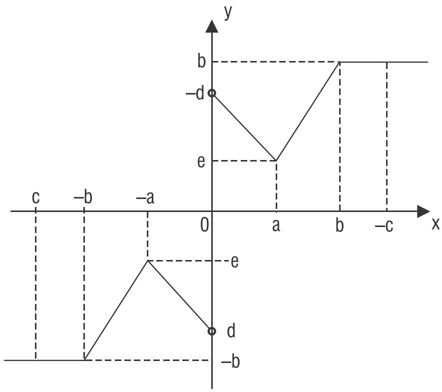
$$\frac{x}{100} + 4 = \frac{n}{200}x - \frac{n^2+n-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{100n\,(n+1)}{n-2}$$

Devemos ter ainda $200n < x \leq 200\,(n+1)$.

Assim, $200n < \dfrac{100n\,(n+1)}{n-2} \leq 200\,(n+1) \Leftrightarrow 2 < \dfrac{n+1}{n-2}$ e $\dfrac{n}{n-2} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq n < 5.$ Como $n \in \mathbb{N}^*$, devemos ter $n = 4$ e daí $x = \dfrac{100 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 1000\,\text{m}.$

Questão 12

O gráfico ao lado descreve uma função f: $A \to B$



Analise as proposições que seguem.

I. $A = \mathbb{R}^*$
II. f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$
III. Para infinitos valores de $x \in A$, tem-se $f(x) = -b$
IV. $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$
V. f é função par.
VI. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

São verdadeiras apenas as proposições:

(A) I, III e IV.
(B) I, II e VI.
(C) III, IV e V.
(D) I, II e IV.

Gabarito: Letra A.

I. Verdadeira, pois a função está definida em todos os reais, exceto no 0.
II. Falsa, pois se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$, todo elemento de B maior que b ou menor que $-b$ pertenceria ao contra--domínio, mas não à imagem. além disso, f deixaria de estar bem definida em $x = a$ e $x = -a$, pois $f(a)$ e e $f(-a) = -e$.
III. Verdadeira, pois $\forall x \leq -b$, $f(x) = -b$.
IV. Verdadeira, pois $f(-c) = b$, $f(c) = -b$, $f(-b) = -b$ e $f(b) = b$. Portanto, $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = b - (-b) - b + b = 2b$.
V. Falsa, pois $f(a) = e$ e $f(-a) = -e$. Portanto, $f(a) \neq f(-a)$, já que $e \neq 0$. Na verdade, f é função ímpar.
VI. Falsa, pois pelo gráfico, $\exists\, x \in (a, b)$ tal que $f(x) = -d$.

Questão 13

O gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, que tem como coordenadas do vértice (5, 2) e passa pelo ponto (4, 3), também passará pelo ponto de coordenadas

(A) (1, 18).
(B) (0, 26).
(C) (6, 4).
(D) (–1, 36).

Gabarito: Letra A.

1ª Solução:

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $x_v = 5 \Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a} = 5 \Leftrightarrow b = -10a$.

Então, $f(x) = ax^2 - 10ax + c$. Como $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$,

teremos ainda: $\begin{cases} -25a + c = 2 \\ -24a + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25a + c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ e } c = 27.$

Assim, $f(x) = x^2 - 10x + 27$.
Temos $f(0) = 27$, $f(1) = 18$, $f(6) = 3$ e $f(-1) = 38$.

Das alternativas, o único ponto pelo qual a função passa é (1, 18).

2ª Solução:
Vértice = (5, 2) $\Rightarrow$ f(x) = a(x – 5)^2 + 2
Como f(4) = 3, temos 3 = a . (–1)^2 + 2 $\Rightarrow$ a = 1
$\therefore$ f(x) = (x – 5)^2 + 2
A única opção que funciona é (1, 18) já que f(1) = (–4)^2 + 2 = 18.

Questão 14

No plano cartesiano, seja P(a, b) o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais **f** e **g** definidas por $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

É correto afirmar que

(A) $a=\log_2\left(\dfrac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$.

(B) a = $\log_2(\log_2 a)$.

(C) $a=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$.

(D) $a=\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)$.

Gabarito: Letra A.

Como P = (a, b) é o ponto de interseção entre os gráficos de f(x) e g(x), temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\log_{\frac{1}{2}} a \Leftrightarrow 2^{-a}=\log_{\frac{1}{2}} a \Leftrightarrow$$

$$\log_2 2^{-a}=\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}} a\right] \Leftrightarrow a=-\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}} a\right] \Leftrightarrow$$

$$a=\log_2\left(\left[\log_{\frac{1}{2}} a\right]^{-1}\right) \Leftrightarrow a=\log_2\left[\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} a}\right] \Leftrightarrow$$

$$\text{Como } \log_{\frac{1}{2}} a=\log_2\frac{1}{a}, \text{ temos: } a=\log_2\left(\frac{1}{\log_2\frac{1}{a}}\right)$$

Questão 15

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x)=3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e **x** o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.

(A) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
(B) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
(C) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
(D) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

Gabarito: Letra C.

Sabemos que $\text{sen}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a$ e $\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a\cos a$

Com isso,

$$f(x)=3\,.\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right).\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right).\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

(A) Podemos observar que o máximo da função ocorre quando $\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}$. Logo, a proposição é verdadeira.

(B) Para acharmos os instantes de tempo em que a onda atinge as cristas, devemos resolver a equação:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\pm 1\Rightarrow \frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\rightarrow x=1+2k,\ \text{onde } k\in\mathbb{N}.$$

Os valores de x formam uma PA de razão 2. Logo, a proposição é verdadeira.

(D) Vamos calcular $f(x)$ para $x = 1/2, 3/2, 5/2, ...$, ou seja, $x = 1/2 + k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Temos: } \frac{(2k+1)\,.\,\pi}{4}\in\{\pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4\};\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

$$\text{Assim: } \text{sen}^2\left[\frac{(2k+1)\,.\,\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}.$$

Logo, a proposição é verdadeira.

(C) Vemos no item "b" que $x = 1 + 2x$, onde $x \in \mathbb{N}$, são os instantes onde ocorrem as cristas da onda. Substituindo valores de x, achamos que ocorrem somente duas cristas até 4 minutos ($x = 1$ e $x = 3$) e não mais do que duas. Logo, a proposição é **falsa**.

Questão 16

Sejam as funções reais **f**, **g** e **h** definidas por $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{\text{cossec } x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$, $g(x) = |\sec x|$ e $h(x) = |\text{cossec } x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0,2\pi]$.

A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de **f** e **g**; **f** e **h**; **g** e **h** é (são), respectivamente:

(A) 0, 0 e 4.
(B) 3, 1 e 4.
(C) 2, 3 e 4.
(D) 0, 2 e 3.

Gabarito: Letra A.

Podemos simplificar $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{\frac{1}{\text{sen } x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen}^2\, x + \cos^2\, x = 1$$

Porém, $f(x)$ só está definida quando sec x e cossec x também estão, ou seja, quando cos $x \neq 0$ e sen $\neq 0$.

Essa condição faz com que não haja interseção de $f(x)$ com $g(x)$ nem $h(x)$. Quando $|\sec x| = 1$; cossec x não está definida pois $|\sec x| = 1 \rightarrow \sec x = \pm 1 \rightarrow \cos x \rightarrow \pm 1 \rightarrow \text{sen } x = 0$.

O mesmo acontece quando $|\text{cossec } x| = 1$.

Vamos agora calcular as interseções de $g(x)$ e $h(x)$:

$|\sec x| = |\text{cossec } x| \rightarrow \sec x = \pm \text{cossec } x \rightarrow \text{tg } x = \pm 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. No intervalo $[0,2\pi]$, existem 4 valores: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.

Questão 17

Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.
Dessa maneira, esse triângulo **NÃO** é:

(A) acutângulo.
(B) equilátero.
(C) obtusângulo.
(D) isósceles.

Gabarito: Letra C.

Considere um triângulo ABC tal que $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$.
Como os ângulos estão em PA, $2\hat{B} = \hat{A} + C$. Daí, $\hat{B} = 60^o$

Escrevendo os lados em Pg: $\frac{x}{q}, x, xq$ (x é o lado oposto a 60º)

Usando lei dos cossenos, teremos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{q}\right)^2 + (xq)^2 - 2 \cdot \frac{x}{q} \cdot xq \cdot \cos 60^o$$

$$x^2 = \frac{x^2}{q^2} + x^2q^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = x^2\left(\frac{1}{q^2} + q^2\right), \text{ sendo } x \neq 0:$$

$$2 = \frac{1}{q^2} + q^2 \Rightarrow q^4 - 2q^2 + 1 = 0 \Rightarrow q^2 = 1$$

Sendo $q > 0$, teremos $q = 1$.

Logo, os lados são iguais, ou seja, o triângulo é acutângulo e também isósceles. Portanto, não pode ser abtusângulo.

Questão 18

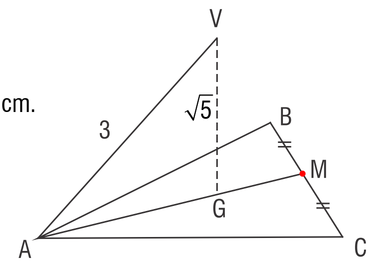
Uma pirâmide regular ABCV, de base triângular ABC, é tal que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede 3 cm.
Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

(A) $\frac{\sqrt{30}}{2}$.
(B) $\sqrt{7}$.
(C) $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
(D) $2\sqrt{2}$.

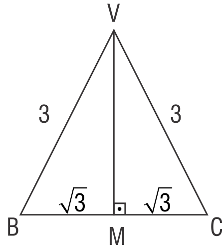
Gabarito: Letra A.

Seja G a projeção de V no plano ABC.
Como a pirâmidde é regular, G é baricentro do ΔABC.

- Pitágoras: $VA^2 = VG^2 + AG^2 \to 3^2 = (\sqrt{5})^2 + AG^2 \to AG = 2$ cm.
- G = baricentro $\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM \Rightarrow AM = 3$ cm.
- ΔABC equilátero $\Rightarrow AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \to AB = 2\sqrt{3}$ cm. $= BC$.

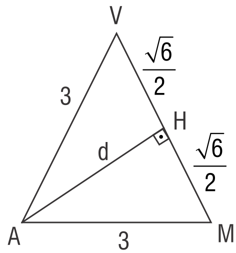


- No ΔVBC, $\overline{VM}$ é altura. Como $VB = VC = 3$ cm, temos por pitágoras: $VM^2 = VB^2 - BM^2$



$VM^2 = 9 - 3 = 6 \Rightarrow VM = \sqrt{6}$ cm.

- Pela simetria da pirâmide, sabemos que a distância *d* pedida é a altura $\overline{AH}$ do ΔVAM. Como ΔVAM é isósceles ($VA = AM = 3$ cm), $VH = HM = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm.



Logo, por Pitágoras, tem-se $d^2 = 3^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow d^2 = 9 - \dfrac{6}{4} \Rightarrow d = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ cm.

Comentário:

Também é possível resolver calculandoo volume de duas maneiras:

$V_{ABCV} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot \sqrt{5} = \dfrac{1}{3} S_{VBC} \cdot d$

e a dificuldade é análoga.

Questão 19

Uma caixa cúbica, cuja aresta mede 0,4 metros, está com água até $\dfrac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, **NÃO** provoca transbordamento de água é:

(A) uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm.
(B) uma pirâmide quadrangular regular, cujas arstas da base e altura meçam 30 cm.
(C) um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}$ dm e a altura 3 dm.
(D) um cilindro equilátero, cuja altura seja 20 cm.

Gabarito: Letra D.

O volume total do cubo é de $(0{,}4\ m)^3 = (4\ dm)^3 = 64L$.

Como $\dfrac{1}{8}$ do cubo fica vazio, o volume vazio é igual a 8L.

Para ver qual sólido **NÃO** provoca transboerdamento de água. Precisamos identificar aquele que possui volume menor ou igual que 8L.

- esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm $\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{2})^3 = \frac{8\pi}{3}$L.

  com $\pi > 3$, temos $V > 8$L.

- pirâmide quadrangular regular com arestas da base iguais a 3 dm e h = 3 dm.

  $$Volume = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 = 9L$$
  $$< 8L$$

- cilindro equilátero de h = 2 dm
  $\Rightarrow 2R = 2 \Rightarrow R = 1$ dm $\Rightarrow V = \pi \cdot R^2h = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi L \approx 6{,}28 < 8L$.
  Logo, este sólido satisfaz!

- cone reto com $R = \sqrt{3}$ dm e h = 3 dm.
  $$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}\pi \cdot 3 \cdot 3 = 3\pi \approx 9{,}42 > 8L.$$

Resposta: O cilindro equilátero.

Questão 20

As seis questões de uma prova eram tais, que as quatro primeiras valiam 1,5 ponto cada, e as duas últimas valiam 2 pontos cada.
Cada questão, ao ser corrigida, era considerada certa ou errada. No caso de certa, era atribuída a ela o total de pontos que valia e, no caso de errada, a nota 0 (zero).
Ao final da correção de todas as provas, foi divulgado a seguinte tabela:

Nº da questão	Percentual de acertos
1	40%
2	50%
3	10%
4	70%
5	5%
6	60%

A média aritmética das notas de todos os que realizaram tal prova é?

(A) 3,7
(B) 3,85
(C) 4
(D) 4,15

Gabarito: Letra B.

$$MA = M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6$$

$$MA = \frac{1{,}5\ .\ 4\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{1{,}5\ .\ 5\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{1{,}5\ .\ 1\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{1{,}5\ .\ 7\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{2\ .\ 5}{100} + \frac{2\ .\ 6\cancel{0}}{10\cancel{0}}$$

$$MA = 0{,}6 + 0{,}75 + 0{,}15 + 1{,}05 + 0{,}1 + 1{,}2$$

$$MA = 3{,}85.$$

PROFESSORES

Rodrigo Villard

Moyses Cohen

Daniel Fadel

Diego Alecyr

Jordan Piva

Matheus Secco

Sandro Davidson

Leo Nascimento