MATEMÁTICA

Questão 17

A equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ possui as raízes m, p e q. O valor da expressão $\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp}$ é

(A) – 2.
(B) – 3.
(C) 2.
(D) 3.

Gabarito: Letra A.

A expressão é igual a:

$$E = \frac{m^2 + p^2 + q^2}{mpq} = \frac{(m+p+q)^2 - 2(mp+mq+pq)}{mpq}$$

Pelas Relações de Girard, temos: $\begin{cases} m+p+q=4 \\ mp+mq+pq=5 \\ mpq=-3 \end{cases}$

Então, $E = \dfrac{4^2 - 2.5}{-3} = -2$

Questão 18

Distribui-se, aleatoriamente, 7 bolas iguais em 3 caixas diferentes. Sabendo-se que nenhuma delas ficou vazia, a probabilidade de uma caixa conter, exatamente, 4 bolas é:

(A) 25%
(B) 30%
(C) 40%
(D) 48%

Gabarito: Letra C

Sejam x_1 o nº de bolas na 1ª urna; x_2 o nº de bolas na 2ª e x_3 na 3ª:

<u>Casos possíveis</u>:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \geq 1; x_2 \geq 1; x_3 \geq 1 \Rightarrow x_1 = x'_1 + 1; x_2 = x'_2 + 1; x_3 = x'_3 + 1 \end{cases}$$

Logo: $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 4$

O nº de soluções inteiras não negativas é: $n(\Omega) = \dfrac{6!}{4!\,2!} = 15$

Casos favoráveis:

Como a soma é 7, apenas uma urna pode receber exatamente 4 bolas, supondo $x_1 = 4$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \geq 1;\ x_3 \geq 1 \end{cases} \quad (2,1) \text{ ou } (1,2)\ (2 \text{ soluções})$$

Logo: n(A) = 3 . 2= 6

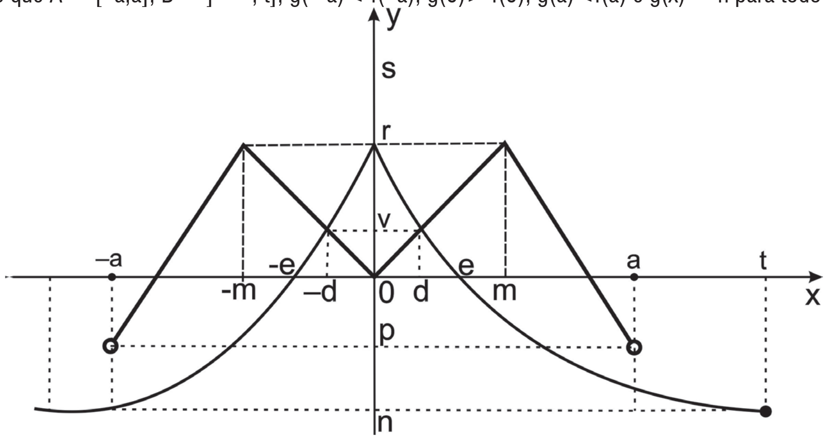
escolha da variável igual a 4.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Questão 19

Considere os gráficos abaixo das funções reais f: A → IR e g: B → IR.

Sabe-se que A = [–a,a]; B =]– ∞, t]; g(– a)< f(–a); g(0)> f(0); g(a)<f(a) e g(x) = n para todo x ≤ – a.



Analise as afirmativas abaixo e marque a **FALSA**:

(A) A função f é par.

(B) Se x ∈]d,m[, então f(x) · g(x) <0

(C) Im(g) = [n,r[∪{s}

(D) A função h:E →IR dada por $h(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida se E = {x∈ IR | –a ≤ x < –d ou d< x ≤ a}

Gabarito: Letra B

(A) A função f é simétrica em relação ao eixo y, logo é par. (verdadeira)

(B) No intervalor]d, e[ambas são positivas, donde f(x) · g(x) > 0 (falsa)

(C) Analisando o gráfico da função g vemos que os valores de y “atingidos” por algum elemento do seu domínio formam o conjunto [n.r[∪ {s} (verdadeiro)

(D) A função $h(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida se, e somente se, f(x) > g(x) . Graficamente isso quer dizer que a função f deve estar acima da função g, que ocorre no intervalo: [– a, –d[∪] d, a]. (verdadeiro)

Questão 20

Sejam **f** e **g** funções reais dadas por $f(x) = \left|\dfrac{\text{sen } 2x}{\cos x}\right|$ e $g(x) = 2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível.
Analise as afirmações abaixo.

I. O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ contém infinitos elementos.

II. No intervalo $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$, a função **f** é crescente.

III. O período da função **f** é $p = \pi$

Sobre as afirmações é correto afirmar que:

(A) apenas III é verdadeira.
(B) apenas I e II são verdadeiras.
(C) todas são falsas.
(D) apenas II e III são verdadeiras.

Gabarito: Letra A.

$$f(X) = \left|\frac{\text{sen } 2x}{\cos x}\right| = |\,2 \text{ sen } x\,|,\ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$g(x) = 2$$

I. $f(x) = g(x) \Rightarrow |\,2 \text{ sen } x\,| = 2 \Rightarrow |\,\text{sen } x\,| = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, que não pertence ao domínio da função f. (falso)

II. Temos $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = |\,2 \text{ sen } \dfrac{3\pi}{4}\,| = \sqrt{2}$ e $f(\pi) = 0$

Como $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > f(\pi)$. F não é crescente. (falso)

III. O período de $2 \text{ sen } x$ é 2π e, portanto, o período de $|\,2 \text{ sen } x\,|$ é $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

(o módulo divide o período por 2) (verdadeiro)

Questão 21

Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilindrico.

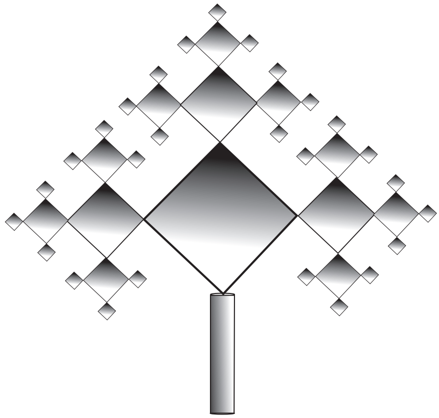
A apartir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres do quadrado foi contruído um quadrado de lado $\dfrac{1}{2}$ metro.

2ª) Em um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado de $\frac{1}{4}$ metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente , construiu-se um quadrado cuja medida do lado é metade da medida do lado do quadrado anterior.

A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas , é correto afirmar que a soma da áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a:

(A) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$.

(B) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$.

(C) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$.

(D) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

Gabarito: Letra D.

Devido ao processo de construção da escultura, o nº de quadrados criados na etapa "n+1" é 3 vezes o nº de quadrados criados na etapa "n".

Além disso, como cada quadrado da etapa "n+1" tem metade do lado de um quadrado da etapa "n", a área fica dividida por 4.

Assim, a soma das áreas dos quadrados construídos em uma dada etapa formam uma PG de razão $q = \frac{3}{4}$.

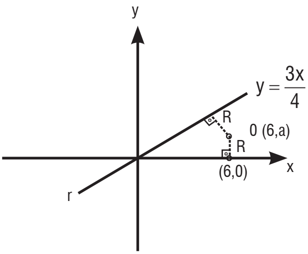
Como o primeiro quadrado tem área 1 m^2 e queremos a área da 7ª etapa: $\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

Questão 22

A circunferência λ é tangente à reta $r : y = \frac{3}{4}x$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa 6. Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de λ é:

(A) $12(y - x) + x^2 = 0$
(B) $3y^2 - 12y + 2x = 0$
(C) $2y^2 - 3x = 0$
(D) $12y - x^2 = 0$

Gabarito: Letra B.



Temos que $0 = (6,a)$ pois a circunferência é tangente ao eixo x no ponto (6,0).

Como λ é tangente à reta $y = \frac{3x}{4}$, temos que:

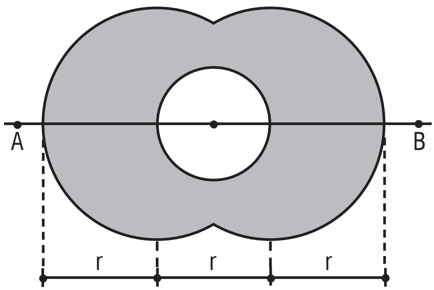
d(0, r) = d (0, eixo x):

$$\frac{|18 - 4a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |a| \Rightarrow 5|a| = |18 - 4a| \Rightarrow 5a = 18 - 4a \text{ ou } 5a = 4a - 18$$

Logo, $a = 2$ ou $a = -18$.
O centro (6,2) pertence à parábola $3y^2 - 12y + 2x = 0$
É fácil ver que o outro centro não pertence à nenhuma das parábolas.

Questão 23

Na figura abaixo , os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A espressão que fornece o valor da área sombreada é

(A) $\dfrac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}r^2$.

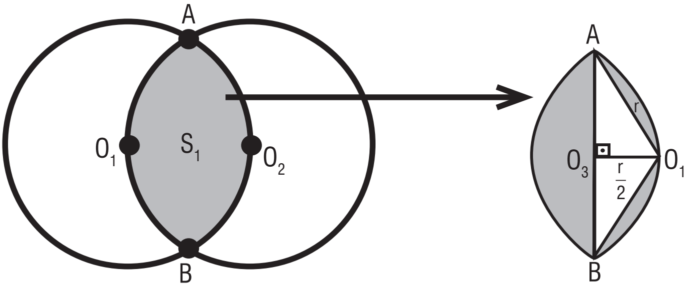
(C) $\dfrac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}r^2$.

(B) $\dfrac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}r^2$.

(D) $\dfrac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}r^2$.

Gabarito: Letra D.

Vamos determinar primeiro a área da região a seguir:



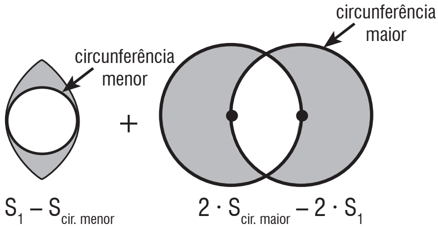
$$\text{Cos } A\hat{O}_1O_3 = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow A\hat{O}_1O_3 = 60° \Rightarrow A\hat{O}_1B = 120°$$

$$AB = 2 \cdot AO_3 = 2 \cdot AO_1 \text{ sen } A\hat{O}_1O_3 = \cancel{2}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = r\sqrt{3}$$

Veja que $S_1 = 2 \cdot$ (Área do setor AO_1B – Área do ΔAO_1B) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_1 = 2 \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2}}{2} \right) = \frac{2\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

Temos as seguintes áreas:

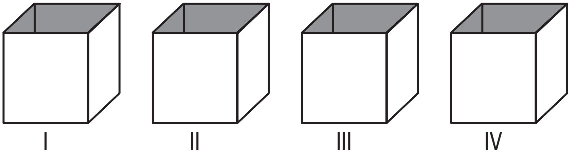


Assim, $S_{final} = 2 \cdot S_{menor} - S_{circ.\ menor} - S_1 =$

$$= 2\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} - \left(\frac{2\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} \cdot r^2$$

Questão 24

Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:



O número de maneiras de que Sr. José guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa **NÃO** contenha mais do que duas bolas, é igual a

(A) 24
(B) 36
(C) 144
(D) 204

Gabarito: Letra D.

Sem restrições, podemos colocar as bolas de $4^4 = 256$ maneiras (4 opções para cada bola).
Contaremos agora o número de maneiras de se por as bolas de forma que haja uma caixa com pelo menos três bolas:

__**Caso 1:**__
Uma caixa com 3 bolas, outra com 1 bola e outras com 0:

$$\underbrace{4}_{\text{Escolha da caixa de 3 bolas}} \cdot \underbrace{3}_{\text{escolha da caixa de 1 bola}} \cdot \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{bolas para a caixa de 3}} \cdot \binom{1}{1} = 48$$

__**Caso 2:**__
Uma caixa com 4 bolas e as outras com 0:
4 (basta escolher a caixa onde irão as 4 bolas).

Logo, há $256 - (48 + 4) = 204$ maneiras para Sr. José guardar suas bolas.

Questão 25

Um tanque com capacidade de 300 litros de água, possui duas torneira: I e II
A torneira I despeja água no tanque a uma vazão de 2ℓ por minuto. Já a torneira II retira água do tanque a uma vazão de $\frac{1}{2}\ell$ por minuto.

Às 8h de certo dia, com o tanque vazio, a torneira I foi aberta e, após 15 minutos, foi fechada. Às 9h e 30 min as duas torneiras foram abertas, e assim permaneceram até 11h e 30 min.
Neste horário a torneira II e fechada, mas a torneira I permanece aberta até o momento em que a água atinge a capacidade do tanque.
Este momento ocorre às:

(A) 12h e 10min.
(B) 12h e 15min.
(C) 12h e 20min.
(D) 12h e 25min.

Gabarito: Letra B.

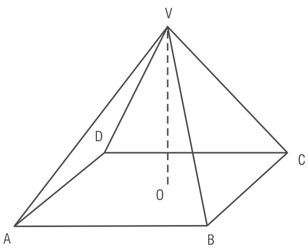
Nos primeiros 15 minutos apenas a torneira I está aberta, assim despejamos 15 . 2 = 30 ℓ de água.
De 9h 30 min até 11h 30 min passam-se 120 minutos com ambas as torneiras abertas. Como a vazão da torneira I é 2ℓ/min e pela torneira II sai 1/2 ℓ/min, podemos considerar que o tanque está enchendo à $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ \ell/\text{min}$. Assim, despejamos $\frac{3}{2}\cdot 120 = 180\ \ell$.
Deste modo a torneira I ainda deve despejar 300 – (30 + 180) = 90 ℓ sendo necessários mais $\frac{90}{2} = 45$ min após 11h 30 min.
Logo o tanque ficará cheio às 12h e 15 min.

Questão 26

Considere uma pirâmide regular ABCDV de base ABCD. Sendo $2\sqrt{2}$ cm a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}$ cm a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral VC é:

(A) $2\sqrt{2}$
(B) $2\sqrt{3}$
(C) 4
(D) $\sqrt{3}$

Gabarito: Letra B.

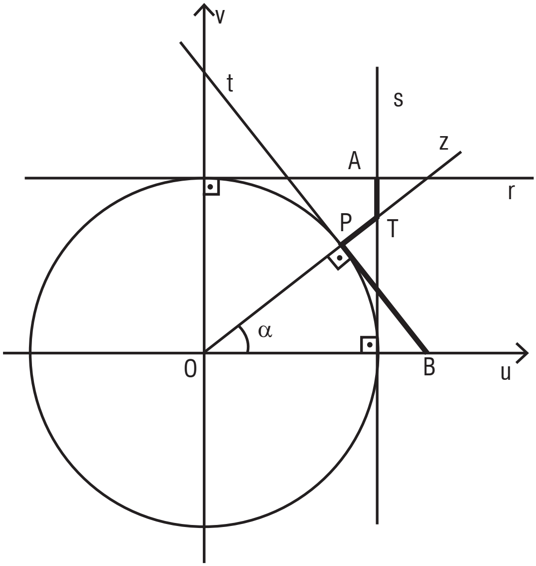


Seja O o centro da base.
Por Pitágoras no $\triangle OVC \therefore VC = 4$

Logo o $\triangle VAC$ é equilátero e a distância pedida é sua altura $= \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Questão 27

No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de , por:

(A) sec α.
(B) cossec α.
(C) tg α+ cotgα .
(D) cossecα + secα .

Gabarito: Letra A.

Seja K a interseção de S com o eixo u, têm-se:
Raio = 1
AT = AK – TK = 1 – tgα
PT = OT – OP = secα – 1
PB = OP · tgα = tgα
Soma = secα.

Questão 28

O sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} (\text{sen } a)\, x + y - z = 0 \\ x - (\text{sen } a)\, y + z = 1 \\ x + y = \cos a \end{cases}$$

Sobre o parâmetro **a**, $a \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

(A) $a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $a = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Gabarito: Letra B.

Para o sistema ser possível e indeterminado, devemos ter seu Δ igual a zero.

$$\begin{vmatrix} \text{sen } a & 1 & -1 \\ 1 & -\text{sen } a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 - \text{sen } a - \text{sen } a = 0 \Leftrightarrow \text{sen } a = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Veja que, neste caso, o sistema é $\begin{cases} y - z = 0 & \text{(i)} \\ x + z = 1 & \text{(ii)} \\ x + y = \pm 1. & \text{(iii)} \end{cases}$

Fazendo (i) + (ii), $x + y = 1$. Então em (iii) o sinal é + e devemos ter $\cos a = 1$, o que nos dá $a = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Questão 29

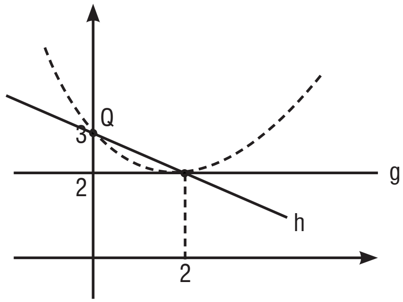
Seja f uma função quadrática tal que:
- $f(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
- tem gráfico interceptando o gráfico da função g, dada por $g(x) = 2$, num único ponto cuja abscissa é 2
- seu gráfico possui o ponto Q, simétrico do ponto R (0, – 3) em relação à origem do sistema cartesiano.

Seja h uma função afim cujo gráfico intercepta o gráfico de f no eixo $\overleftrightarrow{OY}$ e no ponto menor ordenada de f.

Assim sendo, o conjunto solução da inequação $\dfrac{[f(x)]^3\,[g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ contém o conjunto:

(A) [0,8].
(B) [1,7].
(C) [2,6].
(D) [3,5].

Gabarito: Letra D.



- Pela 2ª informação, temos: $f(x) = a(x-2)^2 + 2$.
- Pela 1ª, $a > 0$.
- Q é o simétrico de R(0,–3) em relação à origem: Q(0,3)

Logo, $f(0) = 3$: $a \cdot 4 + 2 = 3 \rightarrow a = 1/4$

$\therefore f(X) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$.

- h é reta que passa por (0,3) e (2,2) = $h(X) = -\frac{1}{2}x + 3$

Agora, $\frac{(f(x)^3 \,.\, (g(x))^{10}}{(h(x))^{15}} \geq 0 \leftrightarrow h(x) > 0$ pois f é sempre positivo e $g(x) \equiv 2$.

$\therefore -\frac{1}{2}x + 3 > 0 \therefore x < 6$

Essa solução contém o intervalo [3,5]

Questão 30

Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% ao ano, enquanto que a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano. Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais:

(Considere: log 7 = 0,85; log 6 = 0,78; log 2 = 0,3)

(A) no 1º semestre do ano de 2034.
(B) no 2º semestre do ano de 2034.
(C) no 1º semestre do ano de 2035.
(D) no 2º semestre do ano de 2035.

Gabarito: Letra B.

Seja p_A o tamanho da população de pássaros da espécie A no início de 2013 e p_B o tamanho da população da espécie B, temos: $p_A = 12 \,.\, P_B$

Como A cresce 5% a.a : $p_A' = P_A \cdot (1{,}05)^n$
e como B cresce 20% a.a : $p_B' = P_B \cdot (1{,}2)^n$

$$p_A' = p_B' \leftrightarrow p_A \cdot (1{,}05)^n = p_B \cdot (1{,}2)^n \leftrightarrow 12 = \left(\frac{1{,}2}{1{,}05}\right)^n = \left(\frac{8}{7}\right)^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \log 2 + \log 6 = n \cdot (3\log 2 - \log 7) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow n = \frac{0{,}3 + 0{,}78}{3 \cdot 0{,}3 - 0{,}85} = 21{,}6$$

Logo as populações serão iguais no 2º semestre de 2034.

Questão 31

Considere no plano complexo, o conjunto dos números $z = x + yi$; $\{x, y\} \subset IR$ e $i^2 = -1$ que satisfazem a condição $|z| \geq |2z + 1|$
É **FALSO** afirmar que:

(A) este conjunto pode ser representado por um círculo de raio igual a $\frac{1}{3}$.

(B) $z = -1$ é o elemento de maior módulo, neste conjunto.

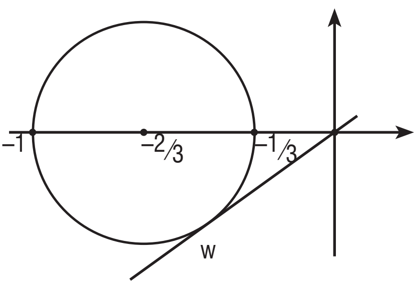
(C) $z = -\frac{1}{3}$ é o elemento de maior argumento, neste conjunto.

(D) não existe z, neste conjunto, que seja imaginário puro.

Gabarito: Letra C.

$$|z| \geq |2z + 1| \leftrightarrow |x + y + i| \geq |x + y + 1 + 2yi| \leftrightarrow x^2 + y^2 \;\; (2x + 1)^2 + (2y)^2 \leftrightarrow$$

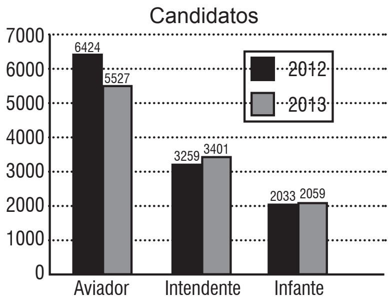
$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 1 \leq 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{4x}{3} + y^2 \leq -\frac{1}{3} \leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{9}$$

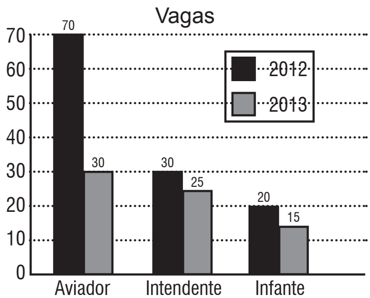


• $z = -1/3$ não é o elemento de menor argumento
(o correto seria o <u>w</u> da figura).

Questão 32

Os gráficos a seguir apresentam os números de candidatos e de vagas para os concursos AFA 2012 e 2013.





Entenda-se por concorrrência a razão entre o número de candidatos e números de vagas.
Do concurso 2012 para o concurso 2013, pode-se afirmar corretamente que

(A) para a infantaria, a taxa de crescimento do número de candidatos foi positiva, porém a concorrência diminuiu.
(B) para o quadro de intendência, tanto a procura quanto a concorrência diminuíram.
(C) apesar da taxa de crescimento do número de candidatos ao quadro de aviadores ser negativa, a concorrência aumentou.
(D) a concorrência dobrou.

Gabarito: Letra C.

(A) Falso.

2012: concorrência para infantaria $= \dfrac{2033}{20}$

2013: concorrência para infantaria $= \dfrac{2059}{15}$

$\dfrac{2033}{20} > \dfrac{2059}{15}$ (concorrência aumentou).

(B) Falso.
A procura aumentou de 2012 para 2013. (de 3259 candidatos, aumentou para 3401)

(C) Verdadeiro.

Concorrência para aviação 2012 $= \dfrac{6424}{70}$

Concorrência para aviação 2013 $= \dfrac{5527}{30}$

$\dfrac{6424}{70} > \dfrac{5527}{30}$

(D) Falso.

Concorrência 2012 $= \dfrac{11716}{120} \cong 97{,}6$

Concorrência 2013 $= \dfrac{10987}{70} \cong 156{,}96$

A concorrência não dobrou.

PROFESSORES:

Jordan Piva
Matheus Secco
Rodrigo Villard