GABARITO DE
MATEMÁTICA

ITA 2010

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Gabarito da prova de Matemática

Realizada em 16 de Dezembro de 2010

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$: Conjunto dos números complexos.
i: Unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$A / B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: Conjunto das matrizes reais m x n.
det M: determinante da Matriz M

P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
n(A): número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Observações: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

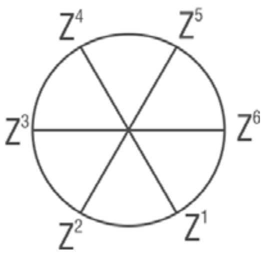
Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a:

(A) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\,i$.

(B) – 1.
(C) 0.
(D) 1.
(E) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\,i$.

Resposta: Letra B.

$Z = \frac{1}{2}.(-1 + \sqrt{3}\,i) \Rightarrow Z = \text{cis}\,(-\frac{\pi}{3})$



Assim forma-se um ciclo de 6 potências cuja soma é nula, logo:

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = \sum_{n=1}^{84} z^n + \cancel{z^1} + \cancel{z^2} + z^3 + \cancel{z^4} + \cancel{z^5} = -1$$

Obs.: usou-se que a soma de potências opostas no ciclo se anulam.

Questão 02

Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I – $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$.
II – $|\overline{z_1} . z_2| = ||\overline{z_2}| . |\overline{z_2}||$.
III – Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$

é(são) sempre verdadeira(s):

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas III.
(D) apenas II e III.
(E) todas.

Resposta: Letra C.

I –

i) $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

ii) $|z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_1| \Leftrightarrow |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$

De (i) e (ii) $= -|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ Falso

II –

$$|\overline{z_1} \cdot z_2| = \left||\overline{z_2}| \cdot |\overline{z_2}|\right| \Leftrightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |z_2|^2$$

Basta tomar $|z_2| \neq 0$ e $|z_1| \neq |z_2|$ Falso

III –

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \frac{|z_1|^{-1} \cdot (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = |z_1|^{-1} \cdot (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$ Verdadeiro

Questão 03

A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a:

(A) 2.
(B) $\frac{i}{2}$.
(C) 0.
(D) $-\frac{1}{2}$.
(E) – 2i.

Resposta: Letra E.

$Z = a + b\,i$

$a^2 - b^2 + 2a\,b\,i + a^2 + b^2 + a\,i - b - 1 = 0$

$2a^2 - b - 1 + a\,.\,(2b + 1)\,i = 0$

$$\begin{cases} 2a^2 - b - 1 = 0 \\ a\,.\,(2b+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ a = 0 \text{ ou } b = -\frac{1}{2}$$

1º Caso: $a = 0 \rightarrow b = -1$

2º Caso: $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \ \Rightarrow$

$Z \in \left\{-i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

$S = -i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -2i$

Questão 04

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é:

(A) $\frac{7}{8}$.

(B) $\frac{5}{7}$.

(C) $\frac{5}{8}$.

(D) $\frac{3}{5}$.

(E) $\frac{3}{7}$.

Resposta: Anulada.

Sejam os eventos:

A = escolher uma moeda do tipo KK (coroa, coroa).

B = escolher uma face do tipo coroa.

O problema pede $P = (A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{25}{40}}{\frac{60}{80}} = \frac{5}{6}$

Obs.: Um erro comum é considerar que a probabilidade é $P = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$, mas isso não leva em consideração que o espaço amostral formado pelas 35 moedas não é equiprovavel pelo fato de que a chance de ser do tipo KK é o dobro do que ser do tipo KC.

Questão 05

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I – $n(B) - n(A)$ é único;
II – $n(B) + n(A) \leq 128$;
III – a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única.

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas III.
(D) apenas I e II.
(E) nenhuma.

Resposta: Letra A.
I – $A \subset B \Rightarrow n(\{C : C \subset B \backslash A\}) = 2^{n(B)-n(A)} = 128 \Rightarrow n(B) - n(A) = 7$ (**V**)
II – $n(B) + n(A) \leq 128$ (**F**), pois $n(A)$ pode assumir qualquer valor natural com $n(B) = n(A) + 7$
III – $(n(B), n(A))$ é único (**F**) idem ao anterior.

Questão 06

O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \quad\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

(A) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(B) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

(C) é impossível quando $c = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

(D) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}, \forall c \in \mathbb{R}$.

(E) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

Resposta: Letra B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 3 & -1 & -5c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3' = L_3 - 3L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & -7 & -5c-9 & -3a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3' = L_3 + 7L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & -5c+5 & -3a+7b \end{pmatrix}$$

$c = 1, a \neq \frac{7b}{3} \rightarrow SI$

$c = 1, a = \frac{7b}{3} \rightarrow SPI$

$c \neq 1 \rightarrow SPD$

Questão 07

Considere as afirmações abaixo:

I. Se *M* é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula *N*, de mesma ordem, tal que *MN* é matriz nula.

II. Se *M* é uma matriz quadrada inversível de ordem *n* tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula *X*, de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$.

III. A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s):

(A) apenas II.
(B) apenas I e II.
(C) apenas I e III.
(D) apenas II e III.
(E) todas.

Resposta: Letra E.

Seja P(λ) o polinômio característico associado a M. Sabe-se que:

$P(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

Onde $a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n$ = detM (produto dos autovalores)

Como M é não-inversível, det M = 0 = a_0.

Sabendo ainda que P (M) = 0 (por Cayley-Hamilton)

$(-1)^n \cdot M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \dots + a_1 M = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M \cdot \underbrace{[(-1)^n \cdot M^{n-1} + a_{n-1} M^{n-2} + \dots + a_1 I]}_{N} = 0 \Rightarrow M \cdot N = 0$

Veja que $N \neq 0$, pois caso contrário teríamos:

$(-1)^n \cdot M^{n-1} + a_{n-1} M^{n-2} + \dots + a_2 M = -a_1 I \Rightarrow$

$\Rightarrow M \cdot [(-1)^n \cdot M^{n-2} + a_{n-1} M^{n-3} + \dots + a_2 I] = -a_1 I$ e então M seria inversível ou $a_1 = 0$ (onde recaimos no caso anterior). (V)

II. det $(M^2 - M)$ = det [M . (M – I)] = det M . det (M – I) = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ det (M – I) $\neq$ 0 (pois M é inversível) $\Rightarrow$ 1 é autovalor $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe X autovetor com MX = X . (X $\neq$ 0). (V)

III. Para existir tal matriz devemos ter $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Nesse caso $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \dfrac{\text{tg}\,\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (Matriz de rotação) sua inversa é:

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.(V)

Questão 08

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a:

(A) – 64.
(B) – 36.
(C) – 28.
(D) 18.
(E) 27.

Resposta: Letra C.

Como 1 é raiz de multiplicidade 2 temos que $x = 1$ também é raiz do polinômio $P'(x) = 4x^3 + 2x + a$. Assim, segue que $P'(1) = 0$, isto é, $4 + 2 + a = 0$, ou seja, $a = -6$.

Visto que $P(1) = 0$ temos $1 + 1 + a + b = 0$, isto é, $b = 4$. Logo, $a^2 - b^3 = (-6)^2 - (4)^3 = -28$.

Questão 09

O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a:

(A) – 5.
(B) – 1.
(C) 1.
(D) 2.
(E) 5.

Resposta: Letra A.

$|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3| \rightarrow x^2 - 3x + 2 = \pm (2x - 3)$

1º Caso: $x^2 - 3x + 2 = 2x - 3 \rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$

$x_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

2º Caso: $x^2 - 3x + 2 = -2x - 3 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$x_3 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

O produto das raízes é: $\dfrac{(5+\sqrt{5})}{2}\dfrac{(5-\sqrt{5})}{2}\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}\dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} = -5.$

Observação: É fácil ver, pelo sinal do Δ das equações, que todas as raízes são reais. Assim, é possível encontrar o produto das raízes usando que o produto das raízes é $\dfrac{c}{a}$.

Então, $x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, x_4 = (x_1 x_2) \,.\, (x_3 x_4) = \dfrac{5}{1} \,.\, \dfrac{(-1)}{1} = -5.$

Questão 10

Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e a soma 6, pode-se afirmar que:

(A) a soma de todas as raízes é 5.
(B) o produto de todas as raízes é 21.
(C) a única raiz real é maior que zero.
(D) a soma das raízes não reais é 10.
(E) todas as raízes são reais.

Resposta: Letra A.

$$\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-k} = (x - a_1)^3 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^1$$

$$\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = x^3 - 3x^2a_1 + 3xa_1^2 - a_1^3 + x^2 - 2xa_2 + a_2^2 + x - a_3$$

$$\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = x^3 + (1-3a_1)\,x^2 + (3a_1^2 - 2a_2 + 1)\,x - a_1^3 + a_2^2 - a_3$$

i) como 0 é raiz, então: $-a_1^3 + a_2^2 - a_3 = 0$

i) dada a PG(a_1, a_2, a_3) onde $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 6 \end{cases}$, logo

PG$(2, 2q, 2q^2)$, então:

$a_2 + a_3 = 4 \Leftrightarrow 2q + 2q^2 = 4$ (I)

$-8 + 4q^2 - 2q^2 = 0 \Leftrightarrow 2q^2 = 8$ (II)

De (I) e (II) temos:

$2q + 8 = 4 \Leftrightarrow q = -2$

Então:

PG(2, –4, 8), logo:

$$\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = x^3 - 5x^2 + 21x = 0.$$

Das relações de Girard temos que a soma das raízes é igual a 5.

Questão 11

A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^{x} - 54e^{y} + 61 = 0$, com x e y reais, representa:

(A) o conjunto vazio.
(B) um conjunto unitário.
(C) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
(D) um conjunto com um número infinito de pontos.
(E) o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x-2)^2 + 3(e^y-3)^2 = 1\}$.

Resposta: Letra D.

Fazendo a susbstituição: $e^x = u$ e $e^y = v$, sendo $u > 0$ e $v > 0$.

$4u^2 + 9v^2 - 16u - 54v + 61 = 0$

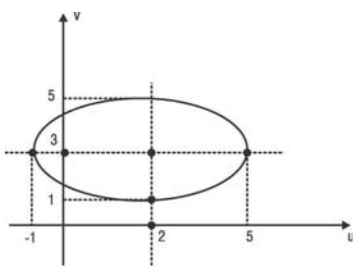
Completando quadrados:

$4(u^2 - 4u) + 9(v^2 - 6v) + 61 = 0$

$4(u-2)^2 + 9(v-3)^2 = 36$

$$\frac{(u-2)^2}{9} + \frac{(v-3)^2}{4} = 1$$

Assim, u e v são as coordenadas dos pontos do primeiro quadrante que pertencem à elipse da figura.



Para cada valor positivo de u e v, calculamos $x = \ln u$ e $y = \ln v$.
Então, existem infinitos pontos (x, y) no conjunto solução de $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^{x} - 54e^{y} + 61 = 0$.

Questão 12

Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ é correto afirmar que:

(A) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.
(B) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
(C) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.
(D) não é divisível por $2x - 1$.
(E) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Resposta: Letra E.

$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

Como a soma dos coeficientes é zero, 1 é raiz do polinômio. Usando Briot-Ruffini, temos:

	2	-3	-3	6	-2
1	2	-1	-4	2	0

Assim: $P(x) = (x - 1)(2x^3 - x^2 - 4x + 2) = (x - 1) . Q(x)$

A pesquisa de raízes racionais mostra que se $x \in \mathbb{Q}$ é raiz de Q(x), então $x \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2\right\}$, para $x = \frac{1}{2}$, temos $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 0$, logo $x = \frac{1}{2}$ é raiz. Usando Briot-Ruffini temos:

	2	-1	-4	2
½	2	0	-4	0

Assim $P(x) = (x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4)$, com conjunto-solução $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}\right\}$.

Questão 13

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1$ cm e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

(A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

(E) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

Resposta: Letra D.

Para acharmos o centro e o raio da circunferência:

$36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$

$$x^2+y^2+\frac{m}{36}x+\frac{n}{36}y-\frac{23}{36}=0$$

$$\left(x+\frac{m}{72}\right)^2+\left(y+\frac{n}{72}\right)^2=\frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{72^2}$$

Como $r=1\rightarrow r^2=1\rightarrow \frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{72^2}=1\rightarrow m^2+n^2=1872(*)$

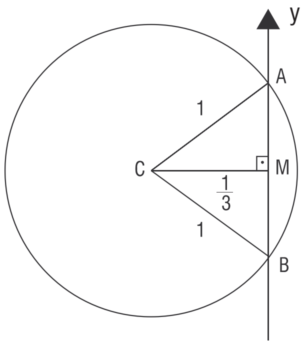
pelo enunciado $\frac{m}{n}=\frac{-2}{3}\rightarrow m = 2k$ e $n = -3k$

Substituindo em (*): $4k^2 + 9k^2 = 1872 \rightarrow k^2 = 144 \rightarrow k = \pm 12$

como o centro $C\left(\frac{-m}{72},\frac{-n}{72}\right)\in 2^{\underline{o}}$ quadrante,

$$\frac{-n}{72}>0\rightarrow\frac{3k}{72}>0\rightarrow k=12\rightarrow C\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

Para olharmos a área, procuramos achar AB. Se fazendo pitágoras:



$$1^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+AM^2\rightarrow AM=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow AB=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Então, a área do $\triangle ABC$ é $S=\frac{AB.CM}{2}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{1}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\ cm^2$

Questão 14

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

(A) $\frac{23}{11}\pi.$

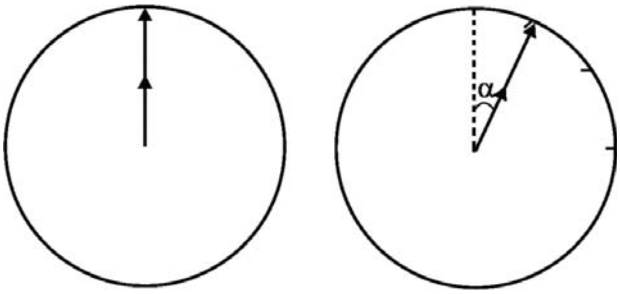
(B) $\frac{13}{6}\pi.$

(C) $\frac{24}{11}\pi.$

(D) $\frac{25}{11}\pi.$

(E) $\frac{7}{3}\pi.$

Resposta: Letra C.



- ponteiro dos minutos: $360^\circ + \alpha$
- ponteiro das horas: α

$$\alpha = \frac{360^\circ + \alpha}{12} \quad \therefore \quad 11\alpha = 360^\circ$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{360^\circ}{11} \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi}{11}\text{rad}$$

Então o ponteiro dos minutos varre o ângulo:

$$2\pi + \frac{2\pi}{11} = \frac{24\pi}{11}\text{rad}$$

Questão 15

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{15}{6}$

(C) $\frac{15}{4}$

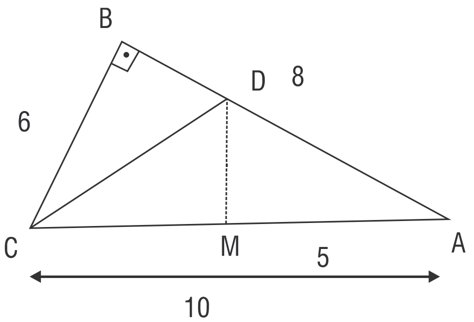
(D) $\frac{25}{4}$

(E) $\frac{25}{2}$

Resposta: Letra D.

Tem-se que $\triangle ADC$ é isósceles, logo D está na mediatriz de AC. Seja M médio de AC. Por pitágoras no $\triangle ADC$, tem-se $AC = 10$.

Seja $AD = \ell$. Tem-se $AM = 5$, e $\triangle ADM \sim \triangle ACB$.



Logo, $\frac{AD}{AC} - \frac{AM}{AB}$, ou seja, $\frac{\ell}{10} = \frac{5}{8}$. Logo $AD = \ell = \frac{25}{4}$ cm

Questão 16

Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

(A) $\frac{10}{3}$

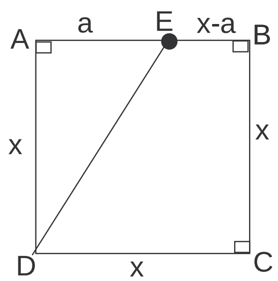
(B) 5

(C) $\frac{20}{3}$

(D) $\frac{25}{3}$

(E) 10

Resposta: Letra C.



Sabe-se que as áreas do quadrado (ABCD), do trapézio (BEDC) e do triângulo (ADE) estão, nesta ordem em P.A.

Então, $x^2, \frac{(2x-a)x}{2}, \frac{ax}{2}$ estão em P.A.

Com isso:

I) $\frac{2x^2 - ax}{\cancel{2}} = \frac{x^2 + \frac{ax}{2}}{\cancel{2}}$ (média aritmética)

$4x^2 - 2ax = 2x^2 + ax$

$2x^{\cancel{2}} = 3a\cancel{x}$; $x \neq 0$

$x = \frac{3a}{2}$

(II)

$x^2 + \frac{2x^2 - ax}{2} + \frac{ax}{2} = 200$

$2x^2 + 2x^2 - \cancel{ax} + \cancel{ax} = 400$

$4x^2 = 400 \therefore x^2 = 100 \therefore x = 10$

$10 = \frac{3a}{2} \therefore a = \frac{20}{3}\text{cm}$

Questão 17

Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135º e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em radianos, é igual a

(A) $\frac{1}{5}\pi$

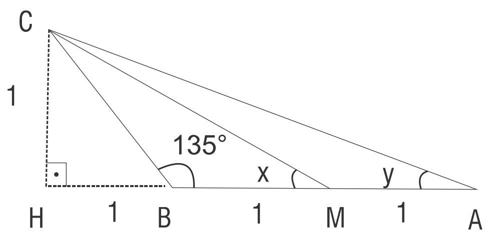
(B) $\frac{1}{4}\pi$

(C) $\frac{1}{3}\pi$

(D) $\frac{3}{8}\pi$

(E) $\frac{2}{5}\pi$

Resposta: Letra B.



Seja H o pé da altura de C em $\overline{AB}$. Já que $A\hat{B}C = 135º$, temos que $C\hat{B}H = 45º$, logo ΔCHB é isósceles, sendo HB = 1 = BM = MA.

Sendo $B\hat{M}C = x$ e $B\hat{A}C = y$, tem-se que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$.

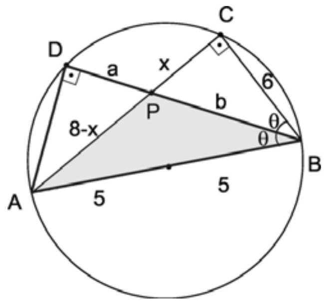
Logo $B\hat{M}C + B\hat{A}C = x + y = 45º = \frac{\pi}{4}$ rad

Questão 18

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a

(A) 14
(B) 15
(C) 16
(D) 17
(E) 18

Resposta: Letra A.



$\triangle ABC$: (Pitágoras)
$AC^2 = 6^2 + 10^2 \;\therefore\; AC = 8$ cm

Tome $DP = a$, $PB = b$ e $CP = x$

BP é bissetriz interna do $\triangle CBA$:

Então, $\dfrac{x}{6} = \dfrac{8 - x}{10}$

$10x = 48 - 6x$

$16x = 48$

$x = 3$ cm

$\triangle PCB$: (Pitágoras)

$b^2 = 3^2 + 6^2 \therefore b = \sqrt{45} \therefore b = 3\sqrt{5}$ cm

Cordas $\overline{BD}$ e $\overline{CA}$: (Potência de Ponto)

$X.\,(8 - x) = a.b$

Então:

$$\cancel{3}.5 = a.\cancel{3}\sqrt{5}$$

$$a = \frac{5}{\sqrt{5}} \therefore a = \frac{5\sqrt{5}}{5} \therefore a = \sqrt{5}\,\text{cm}$$

No $\triangle ADP$, pitágoras:

$AD^2 = (8 - x)^2 - a^2 \quad \therefore AD = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$

Pede-se $\alpha - 2\beta = (ADP) + (APB) + (APB) + (PBC)$

$-2(APB)$

$= (ADP) + (PBC)$

Então

$$\alpha - 2\beta = \frac{2\sqrt{5}\ \sqrt{5}}{2} + \frac{3.6}{2} = 14\,\text{cm}^2$$

Questão 19

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm . Então o raio da esfera, em cm, é igual a:

(A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

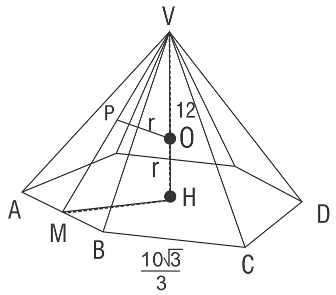
(B) $\frac{13}{3}$

(C) $\frac{15}{4}$

(D) $2\sqrt{3}$

(E) $\frac{10}{3}$

Resposta: Letra E.



Seja V - ABCDEF a pirâmide do enunciado, H o centro da face ABCDEF, O o centro da esfera inscrita.

Como ABCDEF é hexágono regular, tem-se $BH = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ e sendo M médio de AB, $MH = \frac{10\sqrt{3}}{3} . \frac{\sqrt{3}}{2} = 5.$

No $\triangle VMH$, tem-se, por pitágoras, VM = 13. Seja P a projecão de O no $\triangle VAB$.

Tem-se $OP = OH = r$, e, como $\triangle VPO \sim \triangle VHM$, tem-se $\frac{PO}{HM} = \frac{VO}{VM}$, ou seja $\frac{r}{5} = \frac{12-r}{13}$. Logo $r = \frac{10}{3}$ cm.

Questão 20

I. Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida a = 120°.

II. Exite um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respetivamente, 30°, 45°, 50°, 50° e 170°.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triângulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2.880°.

Destas, é(são) correta(s) apenas:

(A) II.
(B) IV.
(C) II e IV.
(D) I, II e IV.
(E) II, III e IV.

Resposta: Letra C.

I: Falso: pois a soma das faces poliédricas de um VÉRTICE deve ser menor que 360°.

II: Correto: a condição de exitência de um ângulo poliédrico é que a soma das faces é menor que 360°, cada face é menor que 180° e que cada face seja menor que a soma das outras.

Veja que: $170° < 30° + 45° + 50° + 50°$.

III: Falso: $A = \frac{3.1+1.4+1.5+2.6}{2} = 15$ e V = 2 + A – F = 2 + 15 – 7 = 10

IV: Correto: pois (v – 2) . 360° = Soma angular de todas as faces.

Então $\frac{2880°}{360} = 8 = 10 - 2$, ok

II e IV são corretas.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que (A\B) U (B\A) = A

Resposta:

$B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x$ e B

$\forall x \in B$, tem-se:

i) $x \in B \wedge x \notin B \setminus A \Rightarrow x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \notin A$ (contradição)

ii) $x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in A$ (contradição)

De (i) e (ii), conclui-se que: Não existem A e B.

Questão 22

Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$ i, j, 1, 2,...,n, com $i \neq j$ distintos entre si.

Resposta:

Sabe-se que no plano complexo as raízes de $z^n = 1$ formam um polígono regular de **n** lados inscrito em uma circunferência de raio 1.

Sabendo ainda que $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, ..., n$ representam os tamanhos dos segmentos unindo esses vértices para achar o nº de segmentos distintos, basta fixar um vértice e ver quantos segmentos distintos "saem" dele.

Retirando o próprio vértice e por simetria temos $\frac{n-1}{2}$ segmentos.

Questão 23

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Resposta:

Espaço Amostral = 11!

Evento = 3! 5! 4! 2!

$$p = \frac{3!4!5!2!}{11!} = \frac{1}{1155}$$

Questão 24

Resolva a inequação em $\mathbb{R}: 16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$.

Resposta:

$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/5}^{(x^2-x+19)}}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/5}^{(x^2-x+19)}}$

$\therefore \log_{1/5}^{(x^2-x+19)} < -2 \Rightarrow x^2 - x + 19 > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x^2 - x + 19 > 25 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 3$

. Existência:

$x^2 - x + 19 > 0$

$\Delta = 1 - 76 = -75 < 0$

$\therefore \forall x \in R$

Então:

$x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Questão 25

Determine todas as matrizes $M \in \mathbf{M}_{2\,x\,2}(\mathbb{R})$ tais que $M\,N = N\,M$, $\forall N \in \mathbf{M}_{2\,x\,2}(\mathbb{R})$.

Resposta:

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow$

i) $\cancel{ax} + cy = \cancel{ax} + bz, \forall\ a, b, c, d \in \Re \Rightarrow$

$\Rightarrow cy = bz, \forall\ a, b, c, d \in \Re.$

Logo teremos $y = z = 0$.

ii) $bx + \cancel{yd} = \cancel{ay} + bw \Rightarrow bx = bw, \forall\ b \in \Re \Rightarrow x = w$

iii) $\begin{cases} az + cw = cx + dz \\ bz + dw = cy + dw \end{cases} \Rightarrow$ são satisfeitas para $y = z = 0$ e $x = w$

Portanto M é da forma $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \forall\ t \in \Re.$

Questão 26

Determine todos os valores de $m \in \Re$ tais que a equação $(2 - m)\,x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Resposta:

Como a equação $(2 - m)\,x^2 + 2\,mx + m + 2 = 0$ tem duas raízes reais distintas ($m \neq 2$ e $\Delta > 0$) e maiores que zero ($P > 0$ e $S > 0$) segue:

I) $\Delta = (2m)^2 - 4.\,(2 - m)\,.\,(m + 2) > 0$

$4m^2 - 4\,(4 - m^2) > 0$

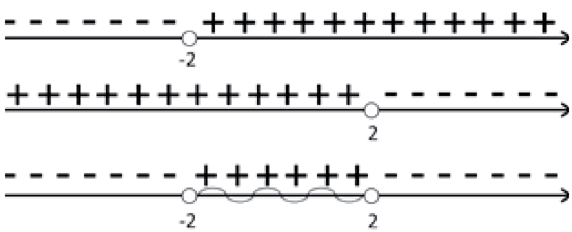
$4m^2 - 16 + 4\,m^2 > 0$

$8m^2 > 16$

$m^2 > 2$

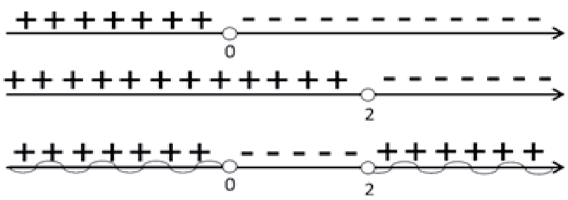
$m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$

II) $P > 0 \Rightarrow \dfrac{m+2}{2-m} > 0$



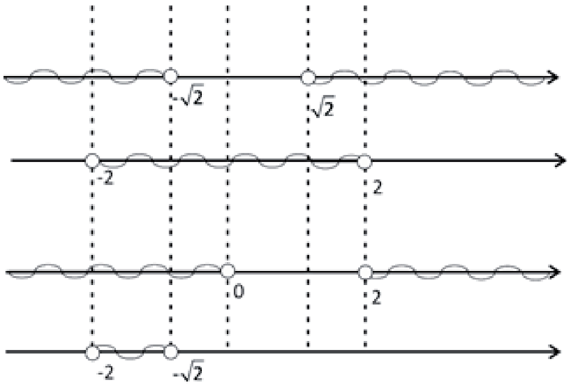
$-2 < m < 2$

III) $S > 0 \Rightarrow \dfrac{-2m}{2-m} > 0$



$m < 0$ ou $m > 2$

De (i), (ii), (iii), vem:

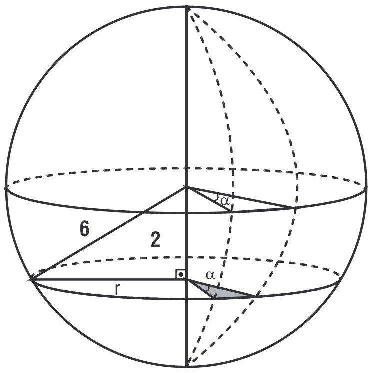


Logo, $m \in \Re; -2 < m < -\sqrt{2}$

Questão 27

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30º em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

Resposta:



A seção gerada por Σ sobre Ω é um círculo de raio $r = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ cm. (Pitágoras)

A cunha esférica determina em Σ uma seção que é um setor de $\alpha = 30º$.

A área da seção da cunha esférica então é dada por $S = \dfrac{\pi r^2}{12} = \dfrac{8\pi}{3} \text{cm}^2$.

Questão 28

(A) Calcule $\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{\pi}{10}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$.

(B) Usando o resultado do item anterior, calcule $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$.

Resposta:

(A) $\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{\pi}{10}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=$

$=\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{10}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=$

$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

(B) $\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{10}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=0$

$\therefore\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{10}=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.y,\quad \text{sendo}\quad y=\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$

$\therefore\cos\frac{2\pi}{5}.\cancel{\cos\frac{\pi}{10}}=2.2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}.\cancel{\cos\frac{\pi}{10}}.y$

$\therefore y=\dfrac{\cos\left(2\pi/5\right)}{4\operatorname{sen}\left(\pi/10\right)}=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi/2-2\pi/5\right)}{4\operatorname{sen}\left(\pi/10\right)}=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi/10\right)}{4\operatorname{sen}\left(\pi/10\right)}=\dfrac{1}{4}$

Então: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}$

Questão 29

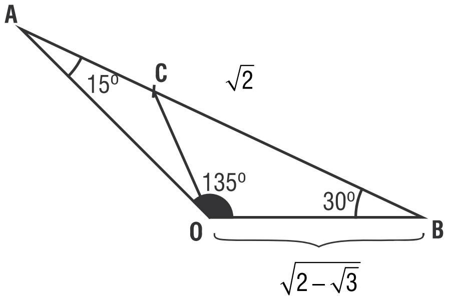
Num triângulo AOB o ângulo $A\hat{O}B$ mede 135º e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto $C\ (\neq B)$.

(A) Mostre que $O\hat{A}B$ mede 15º.

(B) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

Resposta:

(A)



Para calcular o ângulo $O\hat{A}B$, basta fazer lei dos senos:

No ΔOAB, sendo $O\hat{A}B = \alpha$

$$\frac{AB}{\text{sen } 135^o} = \frac{OB}{\text{sen } \alpha}, \text{ ou seja, } \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Assim, $\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\alpha < 45^o \rightarrow 2\alpha = 30^o \rightarrow \alpha = 15^o$

Por consequência, $O\hat{B}A = 30^o$.

(B) Pela construção da circunferência de centro O e raio OB, temos $\overline{OC} = \overline{OB}$, logo $O\hat{C}B = 30^o$. Assim, pelo Teorema do ângulo externo em ΔOAC, $C\hat{O}A = 15^o$, logo $AC = OC = OB = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Questão 30

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}$ cm. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

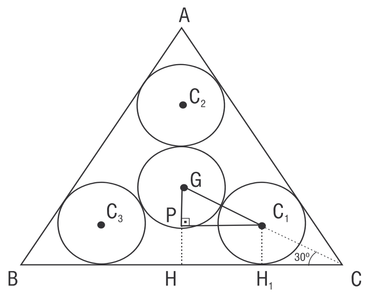
(A) Determine o valor de r.

(B) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

(C) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

Resposta:

De acordo com o enunciado, temos:

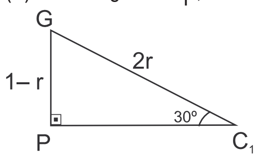


G: baricentro do triângulo (equilátero)

$$GH = \frac{1}{3}\,.\,AH = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = 1\,cm$$

AH = mediana, altura, bissetriz

(A) No triângulo GC_1P, temos:



$$\text{sen }30^\circ = \frac{1-r}{2r}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1-r}{\cancel{2}r} \Rightarrow r = \frac{1}{2}cm$$

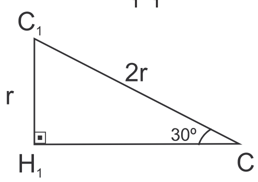
(B) A área do triângulo não preenchida pelos círculos é a área do triângulo equilátero excluindo as áreas das 4 circunferências, isto é:

$$\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4} - 4.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{3} - \pi\right)cm^2$$

(C) Queremos, agora, determinar a distância do centro de cada círculo que tangencia o triângulo (círculos de centros em C_1, C_2 e C_3) até o vértice mais próximo.

$AC_2 = BC_3 = CC_1$

Observe o ΔC_1H_1C $\therefore$



$$\text{sen }30^\circ = \frac{r}{CC_1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{CC_1} \Rightarrow CC_1 = 2r \Rightarrow CC_1 = 1\,cm.$$