ITA 2011/2012

GABARITO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Professores:

Daniel Fadel

Diego Alecyr

Dilmer Silva

Fabio Dias Moreira

Guilherme Calderano

Jaime Barizon

Jordan Piva

Jorge Henrique Craveiro

Marcelo Damasceno

Mariana Venancia

Matheus Secco

Moyses Cohen

Rodrigo Villard

Rômulo Garcia

PENSI
Colégio e Curso

MATEMÁTICA

ANOTAÇÕES

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não negativos
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
P(A): conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
n(A): número de elementos do conjuntos finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$\widehat{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B
arg z: argumento do número complexo z
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
A^C: complementar do conjunto A

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Obs.: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a:

(A) 6.
(B) 8.
(C) 10.
(D) 12.
(E) 14.

Gabarito: Letra A.

Temos as seguintes possibilidades:

1	5	10
0	1	2
5	0	2
0	3	1
5	2	1
10	1	1
15	0	1
0	5	0
5	4	0
10	3	0
15	2	0
20	1	0
25	0	0

Logo, temos 12 possibilidades.

Questão 2

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

(A) $\frac{2}{9}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{4}{9}$.

(D) $\frac{5}{9}$.

(E) $\frac{2}{3}$.

Gabarito: Letra D.

P (pelo menos uma vez) = 1 – P (não ser atingido)
P (não ser atingido) = P (atirador 1 não acertar e atirador 2 não acertar)
Supondo que são eventos independentes:
P (não ser atingido) = P (atirador 1 não acertar) . P (atirador 2 não acertar)

Sendo P (acertar) = $\frac{1}{3}$ então, P (não acertar) = $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Logo: P (pelo menos uma vez) = $1-\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Questão 3

Sejam $z = n^2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ e $w = n(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

(A) $\sqrt{3}+i$.

(B) $2(\sqrt{3}+i)$.

(C) $2(\sqrt{2}+i)$.

(D) $2(\sqrt{2}-i)$.

(E) $2(\sqrt{3}-i)$.

Gabarito Letra B.

$z = n^2 \text{ cis } 45^o$

$w = n \text{ cis } 15^o \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \dfrac{n^2 \text{ cis } 45^o}{n \text{ cis } 15^o} = n \text{ cis } (45^o - 15^o) \Rightarrow \dfrac{z}{w} = n \text{ cis } 30^o$

$(1+i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\sqrt{2} \text{ cis } 45^o)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \text{ cis } (45^o . n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n [\cos (45^o . n) + \underbrace{i \text{ sen } (45^o . n)}_{\text{zero}}] \in \mathbb{R}$

Para ser o menor n, temos:
$45^o . n = 180^o \Rightarrow n = 4.$

Logo: $\dfrac{z}{w} = 4 \text{ cis } 30^o = 4 (\cos 30^o + i \text{ sen } 30^o) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\sqrt{3} + i\right)$

Questão 4

Se arg $z = \dfrac{\pi}{4}$ então um valor para arg $(-2iz)$ é

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$.

(B) $\dfrac{\pi}{4}$.

(C) $\dfrac{\pi}{2}$.

(D) $\dfrac{3\pi}{4}$.

(E) $\dfrac{7\pi}{4}$.

Gabarito Letra E

Podemos usar que $\arg (w_1 . w_2) \equiv \arg w_1 + \arg w_2 \pmod{2\pi}$
Daí $\arg ((-2i)z) \equiv \arg (-2i) + \arg z \pmod{2\pi}$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Questão 5

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais.

É (são) sempre verdadeiras(s):

(A) apenas I
(B) apenas II.
(C) apenas III.
(D) apenas I e II.
(E) I, II e III.

Gabarito: Letra E.

I. $r_1 \in \mathbb{Q}$ e $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r_2 \in \mathbb{Q}$ e $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$
$r_1 \in \mathbb{Q}$ ou $r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_1 \in \mathbb{Q}$ e $r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_3 \in \mathbb{Q}$, pois $r_1 + r_2 + r_3 \in \mathbb{Q}$. (V)

II. Como $(r_1 + r_2) + r_3 \in \mathbb{Q}$ e $r_3 \in \mathbb{Q}$ então $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$. (V)

III. Pelo item II, tem-se $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$
Como $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$, $(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) = 2r_1 \in \mathbb{Q}$ e
$(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2) = 2r_2 \in \mathbb{Q}$.

Assim, $r_1 \in \mathbb{Q}$ e $r_2 \in \mathbb{Q}$. (V)

Questão 6

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 0$$

Então, o coeficiente **a** é igual a:

(A) $2(1 - \sqrt{2})$.
(B) $2(2 + \sqrt{2})$.
(C) $4(\sqrt{2} - 1)$.
(D) $4 + \sqrt{2}$.
(E) $\sqrt{2} - 4$.

Gabarito: Letra C.

$p(x) = 16 + ax - \left(4 + \sqrt{2}\right)x^2 + x^3$

Relações de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-\left(4+\sqrt{2}\right)}{1} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dfrac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Temos que $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ e $x_3 = 4$.

Assim, $a = 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \cdot 4 + 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Questão 7

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a:

(A) -60.
(B) -30.
(C) 0.
(D) 30.
(E) 60.

Gabarito: Letra A.

Do enunciado temos: $11x - 7y + 2z = -127$
da PA, temos:
(I) $3x - 5y - (x + 2y) = -127 - (8x - 2y) \Rightarrow 10x - 9y = -127$

(II) $3x - 5y - x - 2y = 8x - 2y - (3x - 5y) \Rightarrow 10y + 3x = 0$

Fazendo 10 (I) + 9 (II) : $x = -10 \Rightarrow y = 3$
Logo:
$11x - 7y + 2z = -127 \therefore 11(-10) - 7(3) + 2z = -127 \therefore$
$z = 2$
Finalmente, temos:
$x \,.\, y \,.\, z = (-10).(3).(2) = -60$

Questão 8

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a:

(A) $5(5 - 2\sqrt{3})$.
(B) $15(5 - 2\sqrt{3})$.
(C) $30(5 - 2\sqrt{3})$.
(D) $45(5 - 2\sqrt{3})$.
(E) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

Gabarito: Letra C.

(i) $p(x)$ de coeficientes reais, então:

$$\begin{cases} -2i \text{ é raiz} \Rightarrow 2i \text{ é raiz} \\ i - \sqrt{3} \text{ é raiz} \Rightarrow -i - \sqrt{3} \text{ é raiz} \end{cases}$$

(ii) $p(x)$ é divisível por $x - 5 \Rightarrow 5$ é raiz

Logo, $p(x) = a(x - 2i)(x + 2i)\underbrace{(x - (i - \sqrt{3}))}_{(x + \sqrt{3} - i)}\underbrace{(x - (-i - \sqrt{3}))}_{(x + \sqrt{3} + i)}(x - 5)$

$p(x) = a(x^2 + 4)((x + \sqrt{3})^2 + 1)(x - 5)$. Fazendo $x = 1$:
$p(1) = a(5)(5 + 2\sqrt{3})(-4) = 20(5 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow a = -1$.
Assim, $p(-1) = (-1).5.(5 - 2\sqrt{3})(-6) = 30(5 - 2\sqrt{3})$.

Questão 9

Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, b = 1 cm e $c = \frac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado **a** e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em *cm*, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

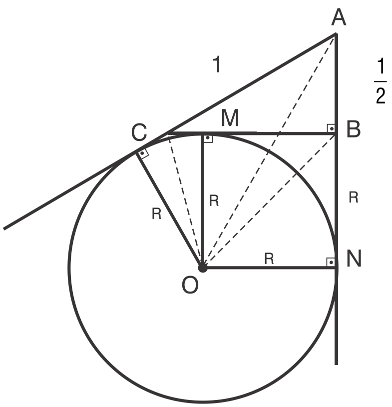
(B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

Gabarito: Letra A.



Veja que os lados do $\triangle ABC$ obedecem à relação pitagórica: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2$, logo é retângulo em **B**.

Seja **O** o centro do círculo mencionado, e **M** e **N** os pontos de tangência sobre os lados BC e AB, respectivamente. Veja que #MONB é um quadrado, e AN é igual ao semiperímetro de $\triangle ABC$, logo $BN = MO = R$, e $AN = R + \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$, logo $R = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Questão 10

Sejam A= (0,0) , B = (0,6) e C = (4,3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

(A) $\frac{5}{3}$.

(B) $\frac{\sqrt{97}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{109}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(E) $\frac{10}{3}$.

Gabarito: Letra B.

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{0+0+4}{3}, \frac{0+6+3}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, 3\right)$$

$$AG = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+9} = \sqrt{\frac{16+81}{9}} = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

Questão 11

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área é igual a:

(A) $\frac{19}{2}$.

(B) 10.

(C) $\frac{25}{2}$.

(D) $\frac{27}{2}$.

(E) $\frac{29}{2}$.

Gabarito: Letra D

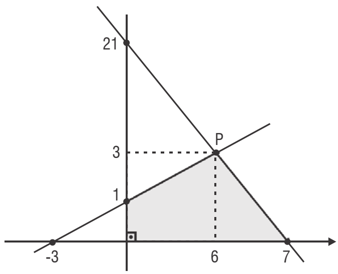
$$r: y = \frac{x}{3} + 1$$

$$s: y = -3x + 21$$

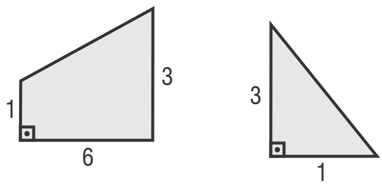
$$P = r \cap s: \frac{X_P}{3} + 1 = -3X_P + 21 \leftrightarrow \frac{10}{3}X_P = 20 \leftrightarrow X_P = 6$$

$$Y_P = 3$$

Daí, $P = (6,3)$.



Então a área é dada pela soma do trapézio e do triângulo.
A saber:



$$\text{Área} = \frac{(3+1)6}{2} + \frac{3.1}{2} = 12 + \frac{3}{2} = \frac{27}{2} \text{ u.a.}$$

Questão 12

Dados os pontos A = (0,0), B = (2,0) e C = (1,1), o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância d = 2 da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por:

(A) $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4+\sqrt{2}} = 0.$

(B) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0.$

(C) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0.$

(D) $r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y - x \pm \sqrt{2+4\sqrt{2}} = 0.$

(E) $r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y - x \pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0.$

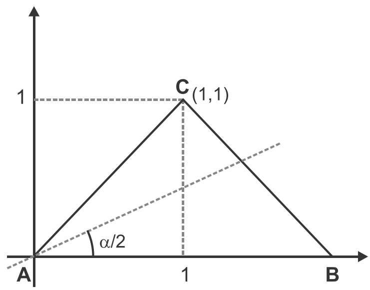
Gabarito: Letra E

Veja que o ΔABC é retângulo isósceles em C, logo $\hat{A} = 45°$.

A equação da bissetriz interna por A é dada por $y = \operatorname{tg}\frac{A}{2}x$,

ou seja, r: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}x - y = 0$

Queremos o LG dos P (x,y) para os quais dist (P, r) = 2:



$$\frac{\left|\operatorname{tg}\frac{A}{2}x - y\right|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+1}} = 2 \text{, logo } \operatorname{tg}\frac{A}{2}x - y = \pm 2\sec\frac{A}{2}$$

Como $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{45°}{2} = \sqrt{2}-1$, e $\sec\frac{A}{2} = \sec\frac{45°}{2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$, temos a equação do LG pedido:

$$r_{1,2}: \left(\sqrt{2}-1\right)x - y \pm 2\sqrt{4-2\sqrt{2}} = 0.$$

Para que o coeficiente de x seja – 1 , como nas respostas, basta multiplicar as equações por $-\left(\sqrt{2}+1\right)$, obtendo:

$$r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y - x \pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0.$$

Questão 13

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;
II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;
III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$.

é (são) sempre verdadeira(s) apenas:

(A) I.
(B) II.
(C) III.
(D) I e III.
(E) II e III.

Gabarito: Letra C.

Usaremos as conhecidas leis de De Morgan:
$(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$ e $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$

Além disso, também usaremos que: $X - Y = X \cap Y^C$

I. $(A - B^C) - C^C = (A \cap (B^C)^C) \cap (C^C)^C = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ que não é sempre igual a $A \cap (B \cup C)$. (F)

II. Analogamente,
$(A - B^C) - C = A \cap B \cap C^C$

O lado direito é $A \cup (B \cap C^C)^C = A \cup (B^C \cup C) = A \cup B^C \cup C$.

Esses conjuntos não são sempre iguais. (F)

III. É uma das leis de De Morgan. (V)

Observações:

. Para perceber que I e II são falsos, é possível gerar contra-exemplos.
. Demonstração do item III:
$x \in (B \cap C)^C \Leftrightarrow x \notin B \cap C \Leftrightarrow x \notin B$ ou $x \notin C \Leftrightarrow x \in B^C$ ou $x \in C^C \Leftrightarrow x \in B^C \cup C^C$.

Logo, $(B \cap C)^C = B^C \cup C^C$.

Questão 14

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n\,(P(A) \cup P(B)) + 1 = n\,(P(A \cup B))$. Então, a diferença $n\,(A) - n\,(B)$ pode assumir:

(A) um único valor.
(B) apenas dois valores distintos.
(C) apenas três valores distintos.
(D) apenas quatro valores distintos.
(E) mais do que quatro valores distintos.

Gabarito: Letra A.

Como A e B são disjuntos, temos que $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\}$ e $n\,(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Assim, temos:

$n(P(A) \cup P(B)) = n(P(A)) + n(P(B)) - n(P(A) \cap P(B)) = 2^{n(A)} + 2^{n(B)} - 1.$

Assim, $2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 2^{n(A \cup B)} = 2^{n(A)+n(B)}$.

Sendo $n(A) = x$ e $n(B) = y$, temos:

$2^x + 2^y = 2^{x+y} \Leftrightarrow 2^y = 2^x(2^y - 1)$.

Como B é não vazio, $2^y - 1$ é ímpar, logo: $2^y - 1 = 1$.

Então $y = 1$. Daí, $2 = 2^x \Leftrightarrow x = 1$.

Logo, $n(A) - n(B) = 1 - 1 = 0$.

Questão 15

Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x $a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;
II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;
III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;
IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

(A) I.
(B) I e III.
(C) II e III.
(D) II e IV.
(E) I, III e IV.

Gabarito: Letra C.

Seja $a^x = t$
Então, $t^2 + 2\beta t - \beta = 0$ e $t > 0$
Temos $\Delta = 4\beta^2 + 4\beta$

I. Se $\beta < 0$, podemos ter $\Delta < 0$ (por exemplo, para $\beta = -1/2$) e, portanto, a equação pode não admitir raízes reais. (F)
II. Se $\beta = -1$, temos $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ e, portanto, a equação possui apenas uma solução real. (V)
III. Se $\beta = 0$, temos $t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$, absurdo, pois $t > 0$ e, portanto, a equação não possui soluções reais. (V)
IV. Se $\beta > 0$, temos $\Delta > 0$, mas o produto das raízes é $-\beta < 0$, o que garante a existência de uma solução $t > 0$ e uma solução $t < 0$. Assim, a equação admite apenas uma solução real. (F)

Questão 16

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \text{arccos}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então:

(A) $S = \varnothing$.
(B) $S = \{0\}$.
(C) $S = \mathbb{R}^{+} \setminus \{0\}$.
(D) $S = \mathbb{R}^{+}$.
(E) $S = \mathbb{R}$.

Gabarito: Letra B.

$$\text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \text{arc cos}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) \Rightarrow \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \text{sen}\,\theta$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) \Rightarrow \frac{-e^{-x} + e^{x}}{2} = \cos\alpha$$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\theta + \cos\alpha = 0 \\ \alpha + \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{sen}\,\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = 0$$

Logo,

$$\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e^{x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Questão 17

Seja $x \in [0,2\pi]$ tal que $\text{sen}(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de tg(x) são, respectivamente:

(A) 1 e 0.

(B) 1 e $\frac{5}{2}$.

(C) –1 e 0.

(D) 1 e 5.

(E) –1 e $-\frac{5}{2}$.

Gabarito: Letra B.

$\text{sen}\,x \,.\, \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x \cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\,(2x) = \frac{4}{5}.$

Como $\text{sen}\,2x = \frac{2\,\text{tg}\,x}{1+\text{tg}^2\,x}$, temos: $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{5}$, onde $t = \text{tg}\,x$

Então:

$4t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ ou $t = \frac{1}{2}$

Então, a soma é $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e o produto é $2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$

Questão 18

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale:

(A) – cos (α) quando *n* é par.
(B) – sen (α) quando *n* é ímpar.
(C) cos (α) quando *n* é ímpar.
(D) sen (α) quando *n* é par.
(E) zero quando *n* é ímpar.

Gabarito: Letra E.

Seja $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$. Esta soma possui $n+1$ termos.

$S = \cos\alpha + \cos(\alpha+\pi) + ... + \cos(\alpha+n\pi)$.

Como $\cos x + \cos(x+\pi) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

- se n for ímpar ($n+1$ par), temos $S = 0$;
- se n for par ($n+1$ ímpar), temos $S = \cos\ \alpha$.

Questão 19

Um cone circular reto de altura 1 *cm* e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *cm* é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ *cm*, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em *cm*, igual a

(A) $\frac{1}{4}$.

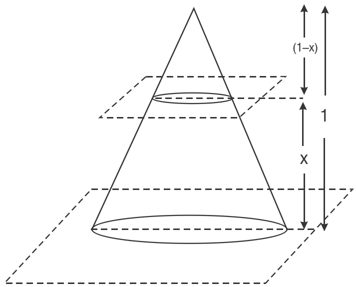
(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

(E) $\frac{3}{4}$.

Gabarito: Letra D.



O volume de um cubo cuja aresta é $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ é $\frac{\pi}{243}$. Seja V o volume do cone maior.

Como os cones são semelhantes, $\left(\frac{1-x}{1}\right)^3 = \frac{\frac{\pi}{243}}{V} \Leftrightarrow (1-x)^3 = \frac{\pi}{243}.\frac{1}{V}$

Como $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2 + R^2$, temos $R^2 = \frac{1}{3}$

Então $V = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{3}.1 = \frac{\pi}{9}$ cm^3

Assim, $(1-x)^3 = \frac{\cancel{\pi}}{243}.\frac{9}{\cancel{\pi}} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Questão 20

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120º e área igual a $3\pi\ cm^2$. Área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

(A) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

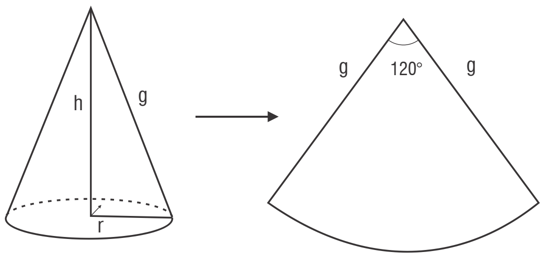
(B) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

(C) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

(D) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

(E) π e $2\pi\sqrt{2}$

Gabarito: Letra A



$$\text{Área lateral} = \frac{120^o}{360^o} \cdot \pi g^2 = 3\pi \Rightarrow g = 3cm.$$

Por outro lado, essa área lateral é igual a πrg.

Portanto, $\pi . r . 3 = 3\pi \Rightarrow r = 1cm$.

Daí, a área total é igual a $\pi r^2 + 3\pi = \pi + 3\pi = 4\pi\ cm^2$

e o volume é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{g^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi.1.\sqrt{9-1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\ cm^3$

Questão 21

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Gabarito: *1ª Solução*

___ *___ ___ ___ ___ | ___ ___ ___ ___ ___

Em qualquer situação, a carta 9 ocupará uma posição acima. Daí, das 9 posições restantes, 4 estão no mesmo grupo dos 9. Portanto, há $\frac{4}{9}$ de probabilidade de o 10 ficar no mesmo grupo do 9.
Resposta: $\frac{4}{9}$.

Gabarito: *2ª Solução*

Sejam A_1 o primeiro conjunto e A_2 o segundo conjunto. O número de casos possíveis é $\binom{10}{5}$, pois ao escolhermos A_1, A_2 já está determinado.

Para o número de casos favoráveis, devemos decidir se 9 e 10 estarão am A_1 ou A_2 e feito isso, devemos escolher os três elementos restantes do conjunto onde estão 9 e 10, o que pode ser feito de $\binom{8}{3}$ maneiras.

Assim, o número de casos favoráveis é $2 . \binom{8}{3}$. (O fator 2 vem da determinação de onde estarão 9 e 10).

Logo, a probabilidade é $\dfrac{2 . \binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{2 . \dfrac{8!}{3!5!}}{\dfrac{10!}{5!5!}} = \dfrac{4}{9}$.

Questão 22

Determine os valores reais de **x** de modo que $\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Gabarito:

Temos que $\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) = 2\left(\frac{1}{2} . \operatorname{sen}(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} . \cos(2x)\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} . \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} . \cos(2x)\right) = 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

Como $-1 \leq \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, temos que $2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$, donde o valor máximo da expressão é 2, que ocorre quando $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Questão 23

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são 1, $1 + x_1$, $1 + x_2$, ..., $1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Gabarito:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + x_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + x_n \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{vmatrix} = x_1 \,.\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, x_n =$$

$$= x_1^n \,.\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n . \, 4^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n^2 - 2n} = 2^8$$, onde q é a razão da PG.

Logo, $n^2 - 2n = 8$, ou seja $n = 4$ ou $n = -2$.

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 4$.

A ordem da matriz é $n + 1 = 5$.

Questão 24

Seja *n* um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A=\begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine *n* e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Gabarito:

$$A=\begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $C_1 \to C_1 - C_2 - C_3$, temos:

$$\det A=\det\begin{bmatrix} n-2 & 1 & 1 \\ 0 & n & 5 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{Laplace} \\ 1^{\text{a}}\text{ coluna}}}{=} (n-2).\det\begin{bmatrix} n & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}=(n-2)(-2n+15)$$

Como det A = 9, teremos $(n-2)(-2n+15) = 9 \Leftrightarrow -2n^2 + 19n - 39 = 0 \Leftrightarrow n = 3$ ou $n=\frac{13}{2}$

Mas $n \in \mathbb{N}$, donde $n = 3$.

Assim, $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Seja $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ a primeira coluna de A^{-1}.

Como $AA^{-1} = I$, temos:

$$\begin{cases} 3a+b+c=1 \\ 8a+3b+5c=0 \\ -5a-3b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c)=(1,-1,-1).$$

Logo, a soma dos elementos da 1ª coluna é – 1.

Questão 25

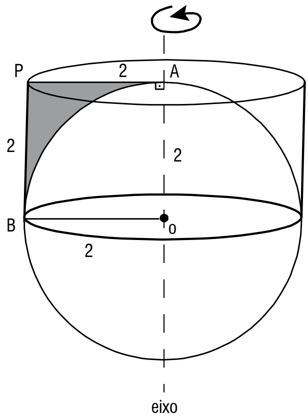
Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

(A) A área total da superfície do sólido.
(B) O volume do sólido.

Gabarito:

Seja O o centro de ω, então AO = 2 cm, PO = $2\sqrt{2}$ cm e $P\hat{A}O = 90°$, logo PA = PB = 2 cm. Veja que #PAOB é um quadrado.

O sólido descrito pelo enunciado é um cilindro menos um hemisfério, obtidos pela rotação de $\overline{PB}$ e $\overset{\frown}{AB}$ em torno de $\overleftrightarrow{AO}$.



(A) A área total da superfície é a soma da área de uma base do cilindro, sua área lateral, e a área do hemisfério:

$$S_{sup} = \pi r^2 + 2\pi rh + \frac{4\pi r^2}{2} =$$

$$= \pi \,.\, 2^2 + 2\pi \,.\, 2 \,.\, 2 + \frac{4\pi \,.\, 2^2}{2} = 20\pi \text{ cm}^2$$

(B) O volume é a diferença entre o volume do cilindro e o volume do hemisfério:

$$V = \pi r^2 h - \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \pi \,.\, 2^2.2 - \frac{2}{3} \,.\, \pi \,.\, 2^3 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Questão 26

As interseções das retas r : x – 3y + 3 = 0, s : x + 2y – 7 = 0 e t : x + 7y – 7 = 0, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

(A) a área total da superfície do prisma;
(B) o volume do prisma.

Gabarito:

$$A = r \cap s : -\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

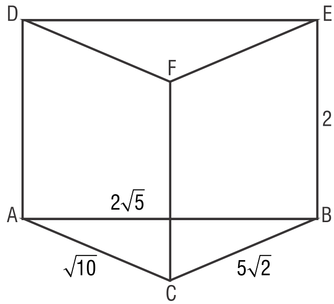
$$y_A = 2 \Rightarrow x_A = 3 \Rightarrow A(3,2)$$

$$B = s \cap t : -\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$y_B = 0 \Rightarrow x_B = 7 \Rightarrow B(7,0)$$

$$C = r \cap t : -\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$y_C = 1 \Rightarrow x_C = 0 \Rightarrow C(0,1)$$



Assim: $d(A,B) = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$d(A,C) = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$d(B,C) = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$

(A) $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow A_{base} = \frac{1}{2}.|\Delta| = 5 \text{ u.a.}$$

$$\Rightarrow A_{total} = (10\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 10) \text{ u.a.}$$

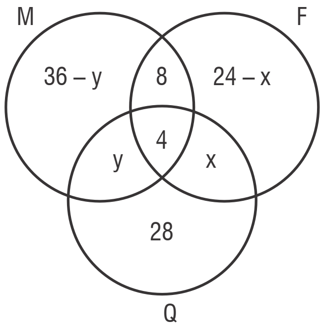
(B) Vol = A_{base} . h = 5 . 2 = 10 u.v.

Questão 27

Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Gabarito:

No diagrama, coloquemos as porcentagens de alunos em cada conjunto: M dos que estudam Matemática, F os de Física e Q os de Química. Seja x a porcentagem de alunos que só estudam Física e Química, e y a dos que só estudam Matemática e Química. Pelo enunciado, temos que os que só estudam Matemática são $36 - y$ e os que só estudam Física são $24 - x$. Dado que cada aluno estuda alguma das três matérias, a soma das porcentagens deve ser 100, logo os que estudam apenas Química são 28%. Como os que estudam Química são 32%, temos que $4 + y + x + 28 = 32$, logo $x + y = 0\%$.
Mas aí 63 estudantes correspondem a zero por cento dos n alunos!
A situação descrita pelo enunciado é impossível, ou ainda, não existe n natural para o qual o enunciado é satisfeito.



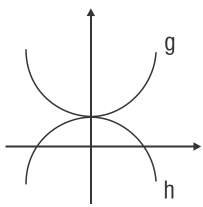
Questão 28

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, x \geq 0 \\ 3 - x^2, x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

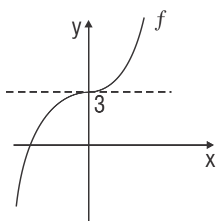
Gabarito:

A função f é dada por $f(x) = \begin{cases} g(x), \text{se } x \geq 0 \\ h(x), \text{se } x < 0 \end{cases}$, onde $g(x) = 3 + x^2$ e $h(x) = 3 - x^2$.

Veja que os gráficos de g e h são parábolas de mesmo vértice:



Logo o gráfico de f é



Então, é fácil ver que f é bijetora, pois toda reta horizontal corta seu gráfico exatamente 1 vez.

Além disso, podemos ver que $f^{-1}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), \text{ se } x \geq 3 \\ h^{-1}(x), \text{ se } x < 3 \end{cases}$.

Inversa de g:

$$y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$$
$$x = \pm\sqrt{y-3}$$
$$\therefore g^{-1}(y) = \sqrt{y-3}$$

Inversa de h:

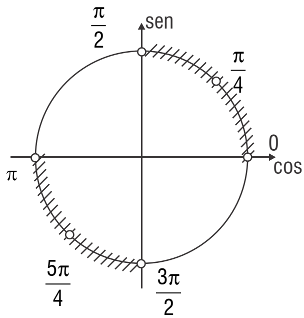
$$y = 3 - x^2 \ (x < 0)$$
$$x = \pm\sqrt{3-y}$$
$$x = -\sqrt{3-y}$$
$$\therefore h^{-1}(y) = -\sqrt{3-y}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, \text{ se } x \geq 3 \\ -\sqrt{3-x}, \ x < 3 \end{cases}$

Questão 29

Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{tg(\theta)} e^{sen(\theta)} \geq 0$.

Gabarito



Restrições: $tg\theta \neq 1$ e $tg\theta > 0$.

Daí, $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Dividimos em 2 casos:

1º caso: $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Aqui tem-se $tg\theta > 1$

Então, $\log_{tg\theta} e^{sen\theta} \geq 0 = \log_{tg\theta} 1 \xrightarrow[\text{base} > 1]{} e^{sen\theta} \geq 1 = e^0 \longrightarrow sen\theta \geq 0$

Dos valores no intervalo analisado, a solução é $S_1 = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

2º caso: $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

Aqui, tem-se $tg\theta < 1$.
Então, $\log_{tg\theta} e^{sen\theta} \geq 0 = \log_{tg\theta} 1 \xrightarrow[\text{base} < 1]{} e^{sen\theta} \leq 1 = e^0 \longrightarrow sen\theta \leq 0$

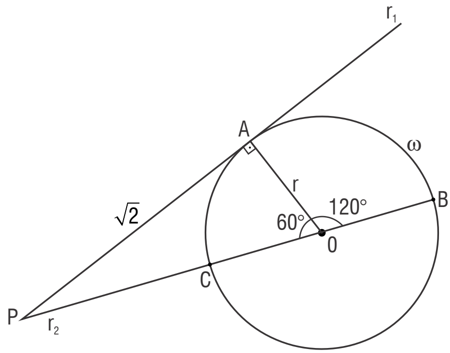
Dos valores no intervalo analisado, a solução é $S_2 = \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

Então, $S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Questão 30

As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 inercepta ω nos pontos B e C diariamente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Gabarito:



Como A é ponto de tangência, OA é perpendicular a PA.
$\overset{\frown}{AC} = 60^o \Rightarrow A\hat{O}C = 60^o$.

No triângulo OAP, temos: $\tan 60^o = \frac{\sqrt{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Como $A\hat{O}B = 120^o$, a área do menor setor definido por $\overset{\frown}{AB}$ é $\frac{120^o}{360^o} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{9}$ cm² .

Comentários Finais:

A prova de Matemática deste ano foi, como sempre, bastante abrangente. Podemos dizer, também, que a prova foi um pouco mais fácil que as dos anos anteriores, mas isso não comprometeu em nada a reconhecida qualidade deste concurso.

Parabenizamos, então, a banca de Matemática do vestibular do ITA pela prova deste ano.