PROVA ITA

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais m x n

det(M): determinante da matriz M
M^t: transposta da matriz M
$A \setminus B$: $\{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,\ k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária, $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

Rez: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
$]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n : a_0 + a_1 x + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$

Arg z: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Arg $z \in [0, 2\pi[$
A^c: Conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^c \cap C$;
III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B)$;

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas I e II.
(D) apenas I e III.
(E) todas.

Gabarito: Letra C.

I. $A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^C = A \cap (B^C \cup C^C) =$
$= (A \cap B^C) \cup (A \cap C^C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
II. $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \cap B^C = A \cap B^C \cap C$
III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \cap B^C) \cap (B \cap C^C) =$
$= A \cap (B^C \cap B) \cap C^C = A \cap \varnothing \cap C^C = \varnothing$

Obs: Usamos que $X \setminus Y = X \cap Y^C$.

Questão 2

A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

Gabarito: Letra C.

Temos $z^8 - 17z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1$ ou $z^4 = 16$

Para que $z = |z|$, z deve ser real não-negativo.
Logo, $z = 1$ ou $z = 2$ e, portanto, a soma das raízes buscadas é 3.

Questão 3

Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

(A) $\sqrt{29}$.
(B) $\sqrt{41}$.
(C) $3\sqrt{5}$
(D) $4\sqrt{3}$
(E) $3\sqrt{6}$.

Gabarito: Letra B.

$(z - 5 + 3i)^4 = 1$; Usando que $\sqrt[4]{1} = \pm 1 \text{ ou } \pm i$

$\Rightarrow z - 5 + 3i = 1;\ z - 5 + 3i = -1;\ z - 5 + 3i = i;\ z - 5 + 3i = i$

logo: $z = 6 - 3i$; $z = 4 - 3i$; $z = 5 - 2i$; $z = 5 - 4i$. Seja $\theta = \text{Arg } z$, temos:

$\text{tg } \theta = \dfrac{-1}{2}$; $\text{tg } \theta = \dfrac{-3}{4}$; $\text{tg } \theta = \dfrac{-2}{5}$; $\text{tg } \theta = \dfrac{-4}{5}$, onde os 4 pontos pertencem ao 4º quadrante.

Como z_0 possui o menor argumento principal

$$z_0 = 5 - 4i \Rightarrow |z_0| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

Questão 04

A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação $8^{\sqrt{x+1}} + 44\,(2^{\sqrt{x+1}}) + 64 = 19\,(4^{\sqrt{x+1}})$ é igual a:

(A) 8.
(B) 12.
(C) 16.
(D) 18.
(E) 20.

Gabarito: Letra D.

Seja $2^{\sqrt{x+1}} = t$.
Então, $t^3 - 19t^2 + 44t + 64 = 0$.
Como -1 é raiz, temos $(t + 1)(t^2 - 20t + 64) = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 4)(t - 16) = 0$.
Mas $t > 0$, donde só podemos ter $t = 4$ ou $t = 16$.
Daí, $\sqrt{x+1} = 2$ ou $\sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 15$.
A soma é 18.

Questão 5

Se os números reais *a* e *b* satisfazem, simultaneamente, as equações $\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ e $\ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5$, um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) 1.
(C) $\sqrt{2}$.
(D) 2.
(E) $3\sqrt{2}$.

Gabarito: Letra A.

(I) $\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ (II) $\ln\left(a^2 + b\right) + \ln 8 = \ln 5$

Temos:

(I) $a^2 b = \frac{1}{16} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{16b}$

(II) $\ln\left(a^2 + b\right) = \ln 5 - \ln 8 = \ln\frac{5}{8} \Rightarrow a^2 + b = \frac{5}{8}$

Logo, $\frac{1}{16b} + b = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 + 16b^2 = 10b$

$16b^2 - 10b + 1 = 0 \quad \therefore \quad b = \frac{1}{8}$ ou $b = \frac{1}{2}$

Como $a^2 = \frac{1}{16b}$,

$b = \frac{1}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $a \geq 0$

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, pois $a \geq 0$

Então, $\frac{a}{b}$ pode ser igual a $\frac{\sqrt{2}/2}{1/8} = 4\sqrt{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}/4}{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão 06

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente por: $f(x) = e^{x^2 + ax + b}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right)$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que:

(A) $g \circ f(1) = \ln 3$.
(B) $\nexists\ g \circ f(0)$
(C) $g \circ f$ nunca se anula
(D) $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
(E) $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Gabarito: Letra E.

$f(-1) = e^{-a+b+1} = 1 \Rightarrow -a+b+1 = 0 \quad (1)$
$f(-2) = e^{-2a+b+4} = 1 \Rightarrow -2a+b+4 = 0 \quad (2)$

Fazendo (1) – (2) : a = 3 e b = 2

Assim $f(x) = e^{x^2 + 3x + 2}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{3x}{6}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Donde : $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(e^6) = \ln\left(\frac{e^6}{2}\right) \neq \ln 3$

$g \circ f(x) = g(e^2) = \ln\left(\frac{e^2}{2}\right) \in \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow e^{x^2+3x+2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 - \ln 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 + 4\ln 2 = 1 + 4\ln 2 > 0.$

Logo existem dois zeros reais distintos para $g \circ f$.
E como $f(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g \circ f$ está definida para todo x real.

Questão 7

Considere funções $f, g, f+g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, $f+g$ é injetora;
II. Se f e g são sobrejetoras, $f+g$ é sobrejetora;
III. Se f e g não são injetoras, $f+g$ não é injetora;
IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f+g$ não é sobrejetora.

é (são) verdadeira (s):

(A) nenhuma.
(B) apenas I e II.
(C) apenas I e III.
(D) apenas III e IV.
(E) todas.

Gabarito: Letra A.

I e II. Falsas.

Tome $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. As duas funções são bijetoras, mas $(f+g)(x) = 0$, que não é injetora, nem sobrejetora.

III e IV. Falsas.

Tome $f(x) = x^2 + \frac{x}{2}$ e $g(x) = -x^2 + \frac{x}{2}$. As duas funções não são sobrejetoras, nem injetoras, mas

$(f+g)(x) = x$, que é bijetora.

Questão 8

Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

Gabarito: Letra C.

Escrevendo a divisão de n^2 por 6, temos $n^2 = 6(2k+1) + r$; $0 < r < 6 \Rightarrow n^2 = 12k + r + 6$.

Lema: Um quadrado perfeito só pode deixar resto 0 ou 1 na divisão por 3 e por 4.

Prova

$$\begin{cases} x \equiv 0 \,(\text{mód}\,3) \Rightarrow x^2 \equiv 0\,(\text{mód}\,3) \\ x \equiv \pm 1 (\text{mód}\,3) \Rightarrow x^2 \equiv 1 (\text{mód}\,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 0,2\,(\text{mód}\,4) \Rightarrow x^2 \equiv 0\,(\text{mód}\,4) \\ x \equiv \pm 1\,(\text{mód}\,4) \Rightarrow x^2 \equiv 1 (\text{mód}\,4) \end{cases}$$

$r = 1 \Rightarrow n^2 = 12k + 7 \Rightarrow n^2 \equiv 3$ (mód 4), absurdo.
$r = 2 \Rightarrow n^2 = 12k + 8 \Rightarrow n^2 \equiv 2$ (mód 4), absurdo.
$r = 4 \Rightarrow n^2 = 12k + 10 \Rightarrow n^2 \equiv 2$ (mód 4), absurdo.
$r = 5 \Rightarrow n^2 = 12k + 11 \Rightarrow n^2 \equiv 3$ (mód 4), absurdo.

Finalmente, r pode ser 3, já que 81 deixa quociente 13 e resto 3 na divisão por 6. ($n = 9$).

Questão 09

Considere a equação $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a – 2 e os coeficientes a_0 a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum_{n=0}^{5} a_n$ é igual a:

(A) -21.

(B) $-\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{21}{32}$.

(D) $\frac{63}{32}$.

(E) 63.

Gabarito: Letra D.

Considere (a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5) = ($1, q, q^2, q^3, q^4, q^5$).
A soma das raízes da equação é igual a $-\frac{a_4}{a_5}$ (relação de Girard) logo, $-\frac{a_4}{a_5} = -2 \therefore a_4 = 2\,a_5$.
Então $q^4 = 2q^5 \rightarrow q = 0$ ou $q = 1/2$.
Veja que $q = 0$ não é possível, pois a equação seria $1 = 0$ (sem solução).
$\therefore q = 1/2$.
Daí $\sum_{n=0}^{5} a_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = \frac{q^6 - 1}{q - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{32}$.

Questão 10

Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}=12$. Então a soma das soluções Z, com Re $z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

(A) $\sqrt{2}$.
(B) $2\sqrt{2}$.
(C) $4\sqrt{2}$.
(D) 4.
(E) 16.

Gabarito: Letra B.

Seja $f(\lambda) = \sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}$. É fácil ver que f é estritamente crescente. Como $f(16) = \sqrt{25}+\sqrt{49}=12$, temos

$\lambda < 16 \to f(\lambda) < 12$
$\lambda > 16 \to f(\lambda) > 12$

Logo, $\lambda = 16$ é a <u>única</u> solução real!

Daí, a equação $z^4 = \lambda - 32$ se torna $z^4 = -16 \Rightarrow z^4 = 16\ \text{cis}\pi$.

Tirando a raiz quarta: $z = 2\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$K = 0$: $z = 2\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$

$K = 1$: $z = 2\ \text{cis}\ 3\frac{\pi}{4}$

$K = 2$: $z = 2\ \text{cis}\ 5\frac{\pi}{4}$

$K = 3$: $z = 2\ \text{cis}\ 7\frac{\pi}{4}$

As únicas soluções com Re $z > 0$ são $z = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $z = 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.

A soma delas é igual a:

$$2\ \text{cis}\frac{\pi}{4}+2\text{cis}\frac{7\pi}{4}=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}.$$

Questão 11

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{1}{3}$ e $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente.

(A) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

(D) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

(E) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Gabarito: Letra E.

$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$p(A^C \cup B^C) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Questão 12

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.
II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que:

(A) dos três resultados, I é o mais provável.
(B) dos três resultados, II é o mais provável.
(C) dos três resultados, III é o mais provável.
(D) os resultados I e II são igualmente prováveis.
(E) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Gabarito: Letra D.

I. $P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

II. $P_2 = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

III. $P_3 = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$

Então, $P_3 < P_2 = P_1$.

Questão 13

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(C) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

(D) 1.

(E) $\sqrt{216}$.

Gabarito: Letra C.

$\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2 \Rightarrow \alpha^5 \,.\, (\det A)^3 = \sqrt{6}\alpha^2$ (Usando Binet e que $\det A^t = \det A$)

Como $\alpha \neq 0$, temos $\alpha^3 . (\sqrt{6}\,)^3 = \sqrt{6} \Rightarrow \alpha^3 = \dfrac{1}{6}$.

Como $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

Questão 14

Sejam a um número real e n o numero de todas as soluções reais e distintas $x \in [0,2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\,\text{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \dfrac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$.

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I.
(B) apenas III.
(C) apenas I e III.
(D) apenas II e IV.
(E) todas.

Gabarito: Letra E.

Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, temos $\cos^8 x = \text{sen}^8 x - 4\text{sen}^6 x + 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 1$ e daí
$\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\text{sen}^6 x = 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 1$.

I. (V) $a = 0 \Leftrightarrow 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 1 = 0$.
Como $\Delta < 0$, não há soluções reais e daí $n = 0$

II. (V) $a = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.
Cada uma das quatro equações tem duas soluções, donde $n = 8$.

III. (V) $a = 1 \Leftrightarrow 6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\text{sen}^2 x = 0$ ou $\text{sen}^2 x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\text{sen}\, x = 0$ ou $\text{sen}\, x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Temos que $\text{sen}\, x = 0$ possui três soluções.

Cada uma das outras duas equações possui duas soluções. Logo, $n = 7$.

IV. (V) $a = 3 \Leftrightarrow 6\text{sen}^4x - 4\text{sen}^2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\text{sen}^2x = 1$ ou $\text{sen}^2x = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \text{sen}\,x = \pm 1$.
Cada uma das duas equações possui uma solução. Logo $n = 2$.

Questão 15

Se $\cos\ 2x = \dfrac{1}{2}$, então um possível valor de $\dfrac{\cot g\,x - 1}{\text{cossec}\,(x-\pi) - \sec\,(\pi - x)}$ é

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(B) 1.
(C) $\sqrt{2}$.
(D) $\sqrt{3}$.
(E) 2.

Gabarito: Letra A.

A expressão pedida é:

$$\frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}x} - 1}{\dfrac{-1}{\text{sen}x} + \dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos x - \text{sen}x}{\text{sen}x}}{\dfrac{\text{sen}x - \cos x}{\text{sen}x\cos x}} = -\cos x.$$

Como $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$, $2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

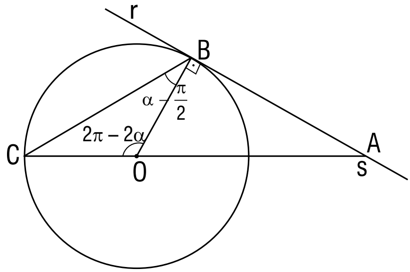
Logo, um possível valor é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, quando $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 16

Uma reta *r* tangencia uma circunferência num ponto *B* e intercepta uma reta *s* num ponto A exterior à circunferência. A reta *s* passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto *C*, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a:

(A) $\dfrac{1}{2}A\hat{B}C$.
(B) $\dfrac{3}{2}\pi - 2\,A\hat{B}C$.
(C) $\dfrac{2}{3}A\hat{B}C$.
(D) $2\,A\hat{B}C - \pi$.
(E) $A\hat{B}C - \dfrac{\pi}{2}$.

Gabarito: Letra B.



Seja O o centro da circunferência. Logo, OB $\perp$ r.

Seja $\alpha = A\hat{B}C$. Logo, $O\hat{B}C = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Como OB = OC, temos $B\hat{O}C = 2\pi - 2\alpha$ e daí $B\hat{A}C =$

$= 2\pi - 2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 2A\hat{B}C.$

Questão 17

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que:

(A) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.
(B) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.
(C) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.
(D) a abcissa do vértice da parábola é $x = -1$.
(E) a abicissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Gabarito: Letra B.

Uma reta paralela ao eixo Ox tem equação y = k.
Para que a parábola seja tangente a essa reta, a equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ deve possuir raiz dupla.

Rearrumando: $x^2 + 2(k - 1)x + (k^2 + 4k + 1) = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(k^2 + 2k + 1) - 4(k^2 + 4k + 1) = 0$
$\Leftrightarrow 24k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

Logo, só há um valor para k.

Comentário:

Vamos encontrar a abcissa do véertice.

Sendo o eixo da parábola uma reta da forma y = mx + q, sabe-se que $m = \lim \frac{y}{x}$.

Na equação dada, dividindo por x2 e fazendo $x \to +\infty$, temos $1 + 2m + m^2 = 0 \Rightarrow m = -1$.

Então, a reta tangente no vértice tem coeficiente igual a 1 (perpendicular ao eixo). Essa tangente é y = x + k. Substituindo na parábola e desenvolvendo: $2x^2 + (2k + 1)\,x + \frac{(k^2 + 4k + 1)}{2} = 0$

Para ser tangente, $\Delta = 0$:

$$\Delta = -12k - 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

Neste caso, $x = x_V = -\frac{(2k+1)}{4} = -\frac{1}{8}$

Questão 18

Das afirmações:

I Duas retas coplanares são concorrentes;

II Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

(A) III.
(B) I e III.
(C) II e III.
(D) III e IV.
(E) I e II e IV.

Gabarito: Letra D.

I. Falso (retas paralelas são coplanares não concorrentes)

II. Falsa (retas paralelas não tem ponto em comum e não são reversas).

III. Verdadeira
Sejam r e s as retas reversas, considere um ponto P em r. Por P passa uma única reta t paralelo a s.
Deste modo r e t são concorrentes em P, donde r e t definem um único plano α //s.
Do mesmo modo existe um único plano β contendo s paralelo a r.
Veja que do modo que α e β foram construídos já temos duas retas concorrentes em um plano paralelas ao outro plano, donde $\alpha // \beta$; com α e β únicos.

IV. Verdadeira
Seja ABCD o quadrilátero em questão e M, N, P e Q pontos médios de AB, BC, CD e AD respectivamente.
Temos MN base média do Δ ABC, donde MN//AC;
PQ a base média do Δ ACD, donde PQ//AC;
NP a base média do Δ BCD, donde NP//BD;
MQ base média do Δ ABD, donde MQ//BD.
Assim, MN//PQ e NP//MQ e o quadrilátero MNPQ é paralelogramo.

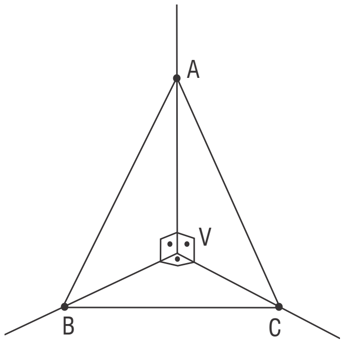
Questão 19

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice *V*, determinando um triângulo *ABC* cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. o volume, em cm³, do sólido *VABC* é.

(A) 2.
(B) 4.
(C) $\sqrt{17}$.
(D) 6.
(E) $5\sqrt{10}$.

Gabarito: Letra A.

Sejam VA = a, VB = b, VC = c.



Podemos supor, sem perda de generalidade, que $AB = \sqrt{10},\ AC = \sqrt{17},\ BC = 5.$

Então, $\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 + c^2 = 17 \\ b^2 + c^2 = 25 \end{cases}$ Somando tudo: $2(a^2 + b^2 + c^2) = 52$
$a^2 + b^2 + c^2 = 26$

Subtraindo de cada equação do sistema: $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$;
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$; $c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

O volume é igual a $V = \dfrac{abc}{6}$, logo $V = \dfrac{1.3.4}{6} = 2\,cm^3$.

Questão 20

No sistema *xOy* os pontos A = (2, 0) B = (2, 5) e C = (0, 1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\dfrac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

(A) 1.
(B) $\dfrac{100}{105}$.
(C) $\dfrac{10}{11}$.
(D) $\dfrac{100}{115}$.
(E) $\dfrac{5}{6}$.

Gabarito: Letra B.

Num cilindro circular reto de raio da base r e altura h, temos:

volume $= \pi r^2 h$
área total $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

Então, a razão procurada é $k = \dfrac{\pi r^2 h}{2\pi r(h+r)} = \dfrac{rh}{2r(h+r)}$

Calculemos os lados do ΔABC:

$AB = 5,\ AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},\ BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

Como $AC^2 + BC^2 = AB^2$, o ΔABC é retângulo em C.

Então, o raio do círculo circunscrito ao ΔABC é igual à metade da hipotenusa AB $\therefore\ r = \dfrac{5}{2}$.
Como $h = 8$:

$$k = \frac{\left(\frac{5}{2}\right).8}{2\left(8 + \frac{5}{2}\right)} = \frac{20}{21} = \frac{100}{105}$$

Questão 21

Para $z = 1 + iy$, $y > 0$, determine todos os pares (a,y), $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva a e y em função de Arg z.

Gabarito:

$z = 1 + yi$
Seja $\theta = \text{Arg } z$ temos $z = |z| \text{ cis } \theta$, elevando a décima:

$z^{10} = |z|^{10} .\text{cis } (10\theta)$

Como $z^{10} = a > 1$ têm-se $|z|^{10} = |a| = a$ donde:

$\cancel{a} = \cancel{a}\ .\text{cis } 10\theta \Rightarrow 10\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{5};\quad k \in \mathbb{Z}$.

Assim: $y = \tan\theta = \tan \dfrac{k\pi}{5}$ e $a = |z|^{10} = \left(1 + y^2\right)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ a = \sec^{10}\theta = \sec^{10} \dfrac{k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z}$

Como queremos todos os pares (a,y) com $a > 1$ e $y > o$
Devemos ter $k = 1$; $k = 2$ donde

$(a,y) \in \left\{\left(\sec^{10} \pi/5, \tan \pi/5\right); \left(\sec^{10} 2\pi/5, \tan 2\pi/5\right)\right\}$

Questão 22

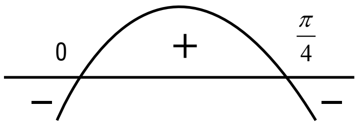
Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função f: d $\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x(\frac{\pi}{4}-x)}(4\,\mathrm{sen}\,x \cos x - 1)$.

Gabarito:

I. $x.\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) > 0$

II. $4\,\mathrm{sen}\,x \cos x - 1 > 0$

III. $x.\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$

I. 

$\Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{4}$

II. 4 sen x cos x = 2 sen 2x $\Rightarrow$ sen 2x > 1/2

Como $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, temos $2x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Para $\mathrm{sen}\,2x > \dfrac{1}{2}$, é necessário $2x \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\therefore$ $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

III. Se $f(x) = x.\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$, o valor máximo de f(x) é atingido para $x = \dfrac{\pi}{8}$ (x do vértice)

Daí, $f(x) \leq f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2 < 1$. Portanto, não ocorre f(x) = 1.

$\therefore D = \left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Questão 23

Considere o $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in R$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação 1x, $x^3+mx^2+(m+4)x+5 = 0$, estejam no intervalo $]-2,2[$.

Gabarito:

A soma das raízes de $P(m)=am^2-3m-18$ é $\dfrac{3}{a}$. Logo, $\dfrac{3}{a}=3$, o que nos dá $a=1$.

Veja que $x=-1$ é raiz de $x^3+mx^2+(m+4)x+5=0$ (pois $-1+m-m-4+5=0$)

Usando Briot Ruffini.

	1	m	m+4	5
– 1	1	m – 1	5	0

Portanto, queremos que uma das raízes de $x^2+(m-1)x+5=0(*)$ esteja no intervalo $]-2,2[$.

As raízes de $P(m)=m^2-3m-18$ são $m=6$ e $m=-3$.

$m=6$ em (*): $x^2+5x+5=0$ $\quad x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ Veja que $\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\in]-2,2[$.

$m=-3$ em (*): $x^2-4x+5=0 \longrightarrow$ Não tem raízes reais!

Logo, $m=6$

Questão 24

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Gabarito:

1º caso: Usando apenas uma cor.
Basta escolher a cor que será utilizada: 4 possibilidades.

2º caso: Usando apenas duas cores.
Escolha das cores: $C_{4,2}=6$
Sejam A e B as cores escolhidas podemos ter:
AABB, AAAB, ABBB 3 possibilidades
Em todos os casos existe apenas uma maneira de formar o tetraedro, logo temos $6 \cdot 3 = 18$ possibilidades.

3º caso: Usando 3 cores.
Escolha das cores: $C_{4,3}=4$
Escolha da cor que irá repetir: 3 possibilidades.
Existe apenas uma maneira de formar o tetraedro, logo, $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ possibilidades.

4º caso: $\dfrac{4!}{4 \cdot 3}=2$ possibilidades (dividimos por 12 para descontar as rotações)

Total: $4 + 18 + 12 + 2 = 36$.

Comentário:

O enunciado diz “usando 4 cores distintas”. Com isso, há uma ambiguidade, pois não fica claro se todas as cores devem ser usadas ou não.

Caso todas devam ser usadas, sejam A, B, C e D as cores. Como o tetraedro pode ser girado, podemos supor que A está na base. Assim, para definir as faces laterais, precisamos permutar 3 cores de forma circular: $P_3^C = 2! = 2$.

Assim, há 2 tetraedros possíveis.

Questão 25

Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases}$$

(A) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.
(B) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Gabarito:

(A) (I) $x^2 - x = \alpha$ (II) $x - x^3 = \beta$

Fatorando: $\begin{cases} x(x-1) = \alpha \\ -x(x-1)(x+1) = \beta \end{cases}$ Logo, $\beta = -\alpha(x + 1)$ e $x = -\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ se $\alpha \neq 0$.

Caso α seja nulo, temos $x = 0$ ou $x = 1$, daí $\beta = 0$.
Então $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ é uma possibilidade.
Substituindo x em (I):

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \alpha \Leftrightarrow \beta^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha^2 - \alpha^3 = 0\ (*)$$

veja que $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ funciona em (*).
Esta relação entre α e β faz o sistema ser <u>possível</u>.

Em (I), para que x seja real, precisamos ter discriminante não-negativo:

$x^2 - x - \alpha = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -\dfrac{1}{4}$

(Olhando (*) como equação do 2º grau em β, o discriminante é igual a $\alpha^2(4\alpha + 1)$. Com $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$, (*) gera β real.)

Finalmente, com $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$ temos que x pode assumir qualquer valor real. Daí, em (II), β pode assumir qualquer valor real (pois β é cúbica em x).

<u>Resposta:</u> α e β tais que $\beta^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha^2 - \alpha^3 = 0$, $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$.

(B) $x^3 - x + \beta = 0$

Façamos $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)(t \in \mathbb{C})$. Daí,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) + \beta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow t^6 + 3\sqrt{3}\,\beta t^3 + 1 = 0(*) \Rightarrow t^3 = \frac{-3\sqrt{3}\beta \pm \sqrt{27\beta^2 - 4}}{2}$$

Seja z a raiz cúbica principal de $\dfrac{-3\sqrt{3}\beta + \sqrt{27\beta^2 - 4}}{2}$

Seja $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\left(w^3 = 1\right)$.
Então $t = z$ ou $t = zw$ ou $t = zw^2$.

Portanto, as soluções são

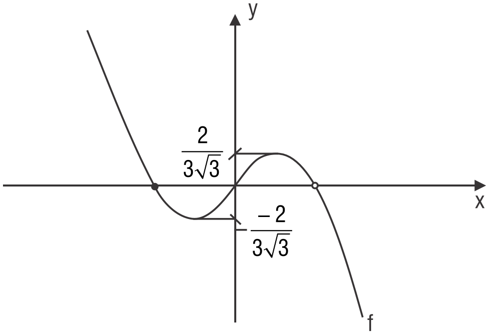
$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(zw+\frac{1}{zw}\right),\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(zw^2+\frac{1}{zw^2}\right).\ (***)$$

Obs.: Para $\beta \in \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ (ou seja, $27\beta^2 - 4 \le 0$), todas as raízes de $x^3 - x + \beta = 0$ são reais, pois

$z \notin \mathbb{R} \to z^3$ e $\bar{z}^3$ são raízes de (**) $\to z\bar{z} = 1$ (produto das raízes) $\to \frac{1}{z} = \bar{z}$.

Como $\frac{1}{w} = \bar{w}$, temos $z + \frac{1}{z} = 2\,\mathrm{Re}(z),\ zw + \frac{1}{zw} = 2\mathrm{Re}\,(zw),\ zw^2 + \frac{1}{zw^2} = 2\mathrm{Re}\,(zw^2)$

Uma outra forma de observar isso é analisando o gráfico $f(x) = x - x^3$.



Veja que toda reta horizontal $y = \beta$, $\beta \in \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$, corta o gráfico em 3 pontos (reais). Caso $\beta = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$, há raiz dupla.

Obs.: Em (***), veja que tudo fica em função apenas de β (sem α).

Questão 26

Considere o sistema nas variáveis reais *x* e *y*:

$$\begin{cases} x \text{ sen } \alpha + 3y \cos \alpha = a \\ x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha = b, \end{cases}$$

com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, *a* e *b* o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Gabarito:

Temos $D = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \end{vmatrix} = \text{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha$

(i) SPD

Devemos ter $D \neq 0$, e daí $\tan^2\alpha \neq 3$. Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, devemos ter $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$. Podemos ter a e b quaisquer.

O conjunto-solução é: $(x, y) = \left(\frac{a\,\text{sen}\alpha - 3b\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha}, \frac{b\,\text{sen}\alpha - a\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha}\right)$.

Para ser SPI ou SI, devemos ter $D = 0$ e daí $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(ii) SPI:

$$\begin{cases} \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{3y}{2} = a \\ \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = b \end{cases}$$

Para ser SPI, devemos ter $a = b\sqrt{3}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $b \in \mathbb{R}$ qualquer.

Aqui o conjunto solução é $\left(t, \frac{2b\sqrt{3} - t\sqrt{3}}{3}\right)$, onde t é real qualquer.

(iii) Para ser SI, devemos ter $a \neq b\sqrt{3}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Questão 27

Encontra os pares $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações:

$$(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \text{ e } \sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}.$$

Gabarito:

I. $(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \Leftrightarrow$
$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta = 2\cos^2(\alpha - \beta) - 1 \Leftrightarrow$
$2\cos^2(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta) - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\cos(\alpha - \beta) = 1$ ou $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$. (*)

II. $\sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\cos\frac{\pi}{6}\,\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}\frac{\pi}{6}\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\text{sen}\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{3}$ (**)

Como $(\alpha+\beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha+\beta\in]0,\pi[$ e $\alpha-\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Daí, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ ou $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, por (**)

Como $\alpha+\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, só podemos ter, em (*), $\cos(\alpha-\beta)=1$, pois $\cos(\alpha+\beta)>0$.

Logo, $\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta$.

Finalmente, podemos ter $(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$ ou $(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

Questão 28

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y-x-2)\left(y+\frac{x}{2}-2\right)=0 \text{ e } x^2-2x+y^2-8=0$$

Gabarito:

I. $(y-x-2)\left(y+\frac{x}{2}-2\right)=0$

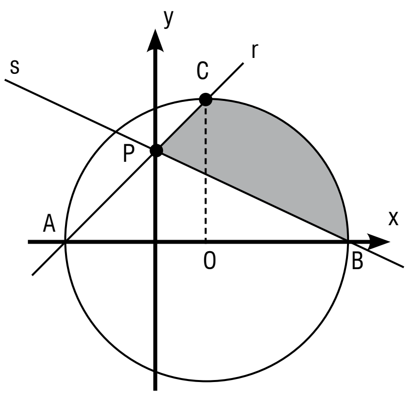
II. $x^2-2x+y^2-8=0$

I. é um par de retas

r: $y=x+2$

s: $y=-\frac{x}{2}+2$

II. é uma circunferência: $(x-1)^2+y^2=9$



Sejam A e B as interseções da circunferência com o eixo x.
Seja $P=r\cap s$.
Seja C a outra interseção de r com a circunferência (pois A já é).
Veja que uma das interseções de s com a circunferência é B.
Seja $O=(1,0)$ o centro da circunferência.
$m_r=1\Rightarrow O\hat{A}C=45^o\Rightarrow A\hat{O}C=90^o$
A área pedida é $S=S_1-S_2-S_3$, onde:

S_1 = área de semicircunferência de raio 3 $\Rightarrow S_1 = \dfrac{\pi \,.\, 3^2}{2} = \dfrac{9\pi}{2}$

S_2 = área do segmento circular $\overline{AC} \Rightarrow S_2 = \dfrac{\pi \,.\, 3^2}{4} - \dfrac{3\,.\,3}{2} = \dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{9}{2}$

S_3 = área do $\Delta ABP \Rightarrow S_3 = \dfrac{6\,.\,2}{2} = 6 \therefore S = \dfrac{9\pi}{2} - \left(\dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{9}{2}\right) - 6 \Rightarrow S = \dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{3}{2}$ unidades de área.

Questão 29

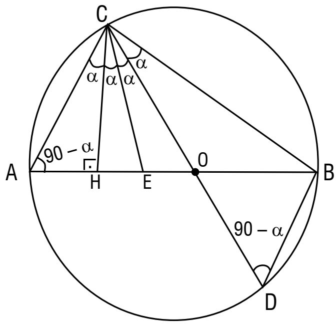
Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se ℓ é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

(A) A medida da mediana em funlçao de ℓ.

(B) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Gabarito:

Solução 1



$\alpha = H\hat{C}A = E\hat{C}H = E\hat{C}O = O\hat{C}B$

Sejam H o pé da altura realtiva a AB e O o ponto médio de AB. Seja D a interseção de CO com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Veja que $C\hat{D}B = C\hat{A}D = 90 - \alpha$ e daí o triângulo CBD é retângulo, donde CD é diâmetro.

O centro da circunferência está na mediatriz de AB que passa por O (pois O é ponto médio), e também está em CD. Como O está nas duas retas, O deve ser o centro da circunferência.

(A) Logo, $CO = AO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\ell}{2}$.

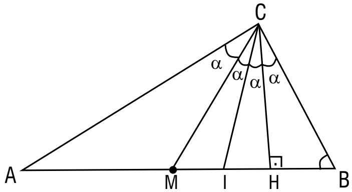
(B) Aqui, veja que $A\hat{C}B = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 4\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{8}$.

Logo, $C\hat{A}B = \dfrac{3\pi}{8}$, $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{8}$ e $A\hat{C}B = \dfrac{\pi}{2}$.

Como o problema é simétrico com relação a $\hat{B}$ e $\hat{A}$, podemos ter também $C\hat{A}B = \dfrac{\pi}{8}$ e $A\hat{B}C = \dfrac{3\pi}{8}$.

Solução 2

(A) Sejam $\hat{C} = 4\alpha$ e $CH = h$



Sejam M, I, H os pés da mediana, de bissetriz e da altura traçadas de C.

- $HB = h \tan \alpha$ e $HM = h \tan 2\alpha \Rightarrow MB = h (\tan \alpha + \tan 2\alpha)$
- $AH = h \tan 3\alpha$ e $HM = h \tan 2\alpha \Rightarrow AM = h (\tan 3\alpha - \tan 2\alpha)$

Como $AM = MB$, temos:

$\tan \alpha + \tan 2\alpha = \tan 3\alpha - \tan 2\alpha$

$\Leftrightarrow \tan 3\alpha - \tan \alpha = 2 \tan 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \text{ sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Como $\text{sen } 2\alpha \neq 0$, temos $\cos 2\alpha = 2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha$ (*)

Usando que $2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha = \cos (3\alpha + \alpha) + \cos (3\alpha - \alpha) = \cos 4\alpha + \cos 2\alpha$

em (*) segue que $\cos 4\alpha = 0$

$$\therefore \cos \hat{C} = 0 \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{2} \left(\alpha = \frac{\pi}{8}\right)$$

Então, $MC = \dfrac{AB}{2}$

$$\therefore MC = \frac{\ell}{2}.$$

(B) Daí, $\hat{B} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow \hat{B} = \dfrac{3\pi}{8}$

$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha \rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{8}$$

Resposta: $C\hat{A}B = \dfrac{\pi}{8}, A\hat{B}C = \dfrac{3\pi}{8}, B\hat{C}A = \dfrac{\pi}{2}.$

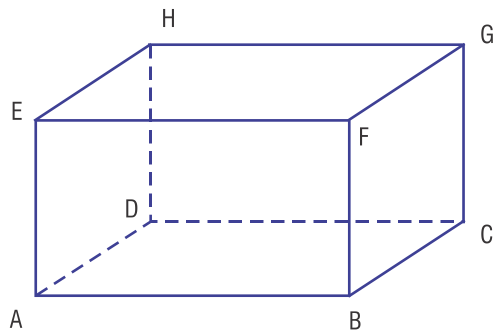
Como o problema é simétrico com relação a $\hat{A}$ e $\hat{B}$, podemos ter também $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{8}$ e $C\hat{A}B = \dfrac{3\pi}{8}$.

Questão 30

Seja *ABCDEFGH* um paralelepípedo de bases retangulares *ABCD* e *EFGH*, em que *A*, *B*, *C* e *D* são, respectivamente, as projeções ortogonais e *E*, *F*, *G*, *H*. As medidas das arestas distintas *AB*, *AD* e *AE* constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide *ABCF* é igual a 10 cm^3. Calcule:

(A) As medidas das arestas do paralelepípedo.
(B) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Gabarito:



(A) Considere (AB, AD, AE) = (a –r, a, a + r).
$a - r + a + a + r = 12 \Rightarrow a = 4$ cm.

$$\text{volume} = \frac{(a-r)\,a\,(a+r)}{6} = 10 \Rightarrow (4-r)(4+r) = 15 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1.$$

Portanto, as arestas são iguais a 3 cm, 4 cm e 5 cm.

(B) Volume = 3 . 4 . 5 = 60 cm^3.
Área total = 2 . (3 . 4 + 3 . 5 + 4 . 5) = 94 cm^2.

COMENTÁRIO FINAL

Podemos afirmar que esta prova de matemática do vestibular do ITA foi a mais difícil dos últimos anos. Na parte objetiva, o nível se manteve, no entanto, na parte discursiva a dificuldade foi muito maior que o habitual. Podemos destacar as questões 25 e 29 como as mais difíceis. Além dessas, a questão 24 apresenta uma dupla interpretação e o enunciado do item b da 25 sugere que são alguns poucos valores para , sendo que, na verdade, pode assumir qualquer valor - isso dificultou bastante o problema.

Por esta maior dificuldade, acreditamos que as notas de matemática dos aprovados deste ano serão muito mais baixas que as do ano passado. Com isso, aqueles alunos que se destacarem nesta prova aumentarão consideravelmente suas chances de aprovação.

Por fim, gostaríamos de parabenizar a banca de matemática pelo alto nível de abrangência e de dificuldade deste exame. Pensamos que com uma prova assim mais difícil, este vestibular selecionará melhor ainda os futuros alunos do Instituto.

PROFESSORES

Jordan Piva

Matheus Secco

Rodrigo Villard