GABARITO DE

MATEMÁTICA

IME 2010

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Realizada em 26 de outubro de 2010

PENSI

Colégio e Curso

Questão 01

A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

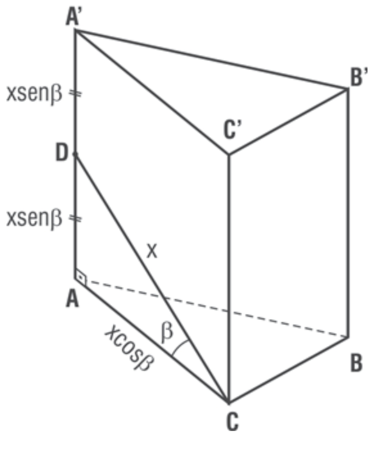
Gabarito:

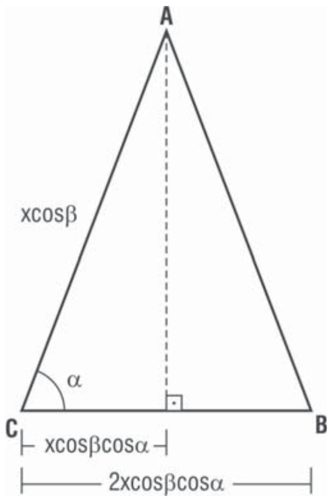
Como o prisma é reto, a área lateral é dada por $S_{lat} = 2P_{\Delta ABC} \cdot AA'$. Já que o ΔACD é reto, sendo $D\hat{C}A = \beta$, $CD = x$, temos $AA' = 2\,x\text{sen}\beta$ e $AC = x\cos\beta$.

Agora, no ΔABC, isósceles em A, temos que $AB = AC$, e $BC = 2 \cdot AC \cos A\hat{C}B = 2x \cos\beta \cos\alpha$.

Logo, $2P_{\Delta ABC} = 2x \cos\beta + 2x \cos\beta \cos\alpha$.

E a área lateral do prisma é dada por: $S_{lat} = 2x \cos\beta\,(1 + \cos\alpha) \cdot 2x\,\text{sen}\beta = 2x^2 \cos 2\beta\,(1 + \cos\alpha)$.





Questão 02

Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 + 16 = 0$.

Gabarito:

A equação da cônica dada é $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$, logo a cônica está rotacionada.

Calculando θ, o ângulo de rotação da cônica, temos:

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C} = \frac{1}{2}\arctan\frac{-10\sqrt{3}}{1-11} = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$ A matriz de rotação é:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$, logo, rotacionando eixos, as novas coordenadas são:

$$x = \frac{\sqrt{3}\,x'' - y''}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{x'' + \sqrt{3}\,y''}{2}.$$

Substituindo na equação da cônica, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{3}\,x'' - y''}{2}\right)^2 - 10\sqrt{3}\,.\,\frac{\sqrt{3}\,x'' - y''}{2}\,.\,\frac{x'' + \sqrt{3}\,y''}{2} + 11\left(\frac{x'' + \sqrt{3}\,y''}{2}\right)^2 + 16 = 0.$$

Fazendo as contas: $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{1} = 1$.

Então temos $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, e $c^2 = a^2 + b^2 = 5$; logo, $c = \sqrt{5}$.

A excentricidade da cônica é dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Questão 03

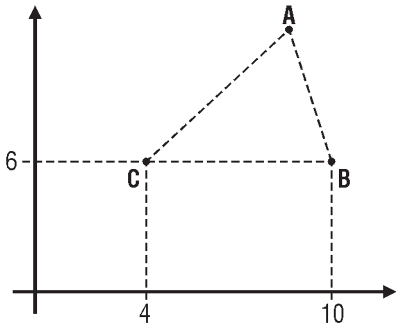
Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.

Obs.: arg(w) é o argumento do número complexo w.

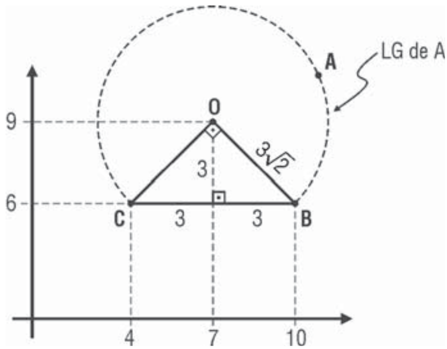
Gabarito:

1ª solução

Considere uma solução geométrica no plano de Argand-Gauss:



Sendo B e C os afixos de z_1 e z_2, e A o afixo de z. A expressão $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)$ é o ângulo orientado entre os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{BA}$. Logo, temos que $C\hat{A}B = 45°$, ou seja, A varia no arco capaz de 45° sobre $\overline{BC}$ (como o ângulo é orientado, A varia apenas no arco capaz superior).



Seja O o centro desse arco capaz, têm-se então que ΔOBC é retângulo isósceles em O; isso ajuda a encontrar as coordenadas de O (7, 9). Ou seja, O é o afixo de 7 + 9i.

O vetor $\overrightarrow{OA}$ corresponde ao número complexo z – 7 – 9i, e, então, o módulo de (z – 7 – 9i) é o módulo de $\overrightarrow{OA}$, que é o raio do arco capaz, que mede $3\sqrt{2}$.

2ª solução

$z = x + yi$

$$W = \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{(x-10)+(y-6)i}{(x-4)+(y-6)i} = \frac{\big((x-10)+(y-6)i\big)\big((x-4)-(y-6)i\big)}{(x-4)^2+(y-6)^2}$$

$$\operatorname{Re} W = \frac{(x-10)(x-4)+(y-6)^2}{(x-4)^2+(y-6)^2}, \operatorname{Im} W = \frac{(x-4)(y-6)-(x-10)(y-6)}{(x-4)^2+(y-6)^2} = \frac{6(y-6)}{(x-4)^2+(y-6)^2}$$

Para arg W $= \frac{\pi}{4}$, devemos ter ReW = ImW > 0.

Igualando: $(x-10)(x-4) + (y-6)^2 = 6(y-6)$ e $y > 6$.

Logo: $x^2 - 14x + y^2 - 18y + 112 = 0$ e $y > 6$.

Veja que isso é equivalente a $\begin{cases}(x-7)^2+(y-9)^2 = 18 \\ y > 6\end{cases}$, que é um arco de circunferência de centro (7, 9) no plano de Argand-Gauss (ou seja, o complexo 7 + 9i).

Nesse caso, $|z - 7 - 9i| = |z - (7 + 9i)|$ é a distância de z a 7 + 9i, que é igual ao raio da circunferência, igual a $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Questão 04

Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:

- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- $n \leq 180.000$.

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

Gabarito:

$n \leq 180.000 \Rightarrow 22.680\, q \leq 180.000 \Rightarrow q < 8$

Temos que $m = \frac{22.680}{q^3}$ ou $m = \frac{22.680}{q^4}$. Como $m \in \mathbb{N}$, temos que, $q^3 \mid 22.680$. Levando em conta que $22.680 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, podemos concluir que $q \in \{2, 3, 6\}$, pois 7^3, 5^3 e 4^3 não dividem 22.680.

Vamos dividir em 3 casos:

Caso 1: $(m, a_2, a_3, 22.680, a_5, n)$

para $q = 3$ e $q = 6$ não temos solução, pois $n \leq 180.000$, pois $n = 22.680q^2$.

para $q = 3$ a solução será $(m, n) = (2.835, 90.720)$

Caso 2: $(m, a_2, a_3, a_4, 22.680, n)$

para $q = 2$ e $q = 6$ temos que $m \notin \mathbb{N}$, pois $m = \dfrac{22.680}{q^4}$

para $q = 3$ a solução será $(m, n) = (280, 68.040)$

Caso 3: $(a_1, m, a_3, a_4, 22.680, n)$

$q = 2 \Rightarrow (m, n) = (2.835, 45.360)$

$q = 3 \Rightarrow (m, n) = (840, 68.040)$

$q = 6 \Rightarrow (m, n) = (150, 136.080)$

Logo, os possíveis valores de (m, n) são (2.835, 90.720), (280, 68.040), (2.835, 45.360), (840, 68.040), (105, 136.080).

Questão 05

Seja ABC um triângulo onde α, β e γ são os ângulos internos dos vértices A,B e C, respectivamente. Esse triângulo está inscrito em um círculo de raio unitário. As bissetrizes internas desses ângulos interceptam esse círculo nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente.

Determine o valor da expressão $\dfrac{\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2} + \overline{BB_1}\cos\frac{\beta}{2} + \overline{CC_1}\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}$.

Gabarito:

1ª solução

A ideia é calcular, em função dos ângulos do triângulo ABC, os segmentos AA_1, BB_1 e CC_1.

Calculemos AA_1, usando a Lei dos Senos (cálculo de cordas). Para tanto, observa-se: $C\hat{B}A_1 = C\hat{A}A_1 = \dfrac{\alpha}{2}$; logo, $A\hat{B}A_1 = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$, e, então, no ΔABA_1, temos: $AA_1 = 2R \operatorname{sen} A\hat{B}A_1 = 2R \operatorname{sen}\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)$

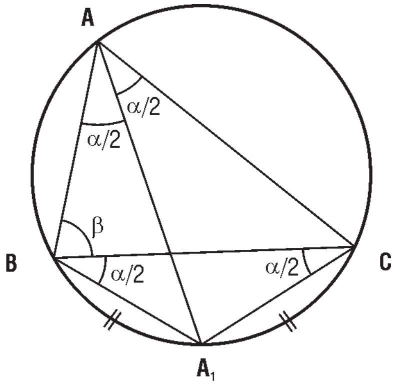
Logo, $AA_1 \cos\dfrac{\alpha}{2} = 2R \operatorname{sen}\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha}{2} = R(\operatorname{sen}(\beta + \alpha) + \operatorname{sen}(\beta))$, por transformação de produto em soma.

Melhorando, $AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} = R(\text{sen}\gamma + \text{sen}\beta)$, pois $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Analogamente, temos $BB_1 \cos\frac{\beta}{2} = R(\text{sen}\alpha + \text{sen}\gamma)$ e $CC_1 \cos\frac{\gamma}{2} = R(\text{sen}\beta + \text{sen}\alpha)$

Logo, $\dfrac{AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} + BB_1 \cos\frac{\beta}{2} + CC_1 \cos\frac{\gamma}{2}}{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma} = \dfrac{2R(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma)}{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\gamma} = 2R = 2$.

Já que o círculo circunscrito é unitário, o valor da expressão é 2.



2ª solução

No ΔBCA1: (Lei dos senos)

$BA_1 = CA_1 = \ell \rightarrow \dfrac{\ell}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = 2 = \dfrac{a}{\text{sen}(180° - \alpha)}$; logo, (i) $\ell = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ e (ii) $\dfrac{a}{\text{sen}\alpha} = 2$

O $\#ABA_1C$ é inscrito. Pelo Teorema de Ptolomeu: $AA_1 \cdot a = \ell b + \ell c$

$$AA_1 = \ell\,\frac{b+c}{a} = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\frac{b+c}{a} \rightarrow AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{b+c}{a} = \frac{b+c}{2}$$

Logo, $AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} + BB_1 \cos\frac{\beta}{2} + CC_1 \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} = a + b + c$

No $\Delta ABC: \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2 = \dfrac{a+b+c}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma}$.

Assim: $\dfrac{AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} + BB_1 \cos\frac{\beta}{2} + CC_1 \cos\frac{\gamma}{2}}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma} = 2.$

Questão 06

Resolva a equação $z^2 + \frac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos.

Gabarito:

1ª Solução:

Completando o quadrado, temos $\left(z - \frac{3z}{z+3}\right)^2 + \frac{6z^2}{z+3} = -5$

$$\left(\frac{z^2}{z+3}\right)^2 + 6\left(\frac{z^2}{z+3}\right) + 5 = 0$$

Equação do 2º grau em $\frac{z^2}{z+3}$: $\frac{z^2}{z+3} = -1$ ou $\frac{z^2}{z+3} = -5$

Logo $\begin{cases} z^2 + z + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 5Z + 15 = 0 \end{cases}$, logo $z = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$ ou $z = \frac{-5 \pm \sqrt{35}i}{2}$.

2ª Solução:

Fazendo o mmc, temos

$P(z) = z^4 + 6z^3 + 23z^2 + 30z + 45 = 0$

Podemos tentar uma fatoração utilizando o lema de Gauss, ou seja, encontrar a, b, c, d inteiros tais que $(z^2 + az + b)(z^2 + cz + d) = p(z)$

O termo em z^0 é $bd = 45$, portanto, há poucos casos possíveis.

O caso que funciona é $b = 3$, $d = 15$:

$(z^2 + az + 3)(z^2 + bz + 15) = z^4 + (a + b)z^3 + (18 + ab)z^2 + (15a + 3b)z + 45$

Igualando os coeficientes:

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 18 + ab = 23 \quad \Rightarrow a = 1, b = 5 \\ 15a + 3b = 30 \end{cases}$$

(Veja que o sistema tem mais equações que incógnitas. Isso é que faz os outros casos darem errado.)

Daí, $p(z) = (z^2 + z + 3)(z^2 + 5z + 15)$ e o problema termina como na solução anterior.

Questão 07

Seja x um número inteiro positivo menor ou igual a 20.000. Sabe-se que $2^x - x^2$ é divisível por 7. Determine o número de possíveis valores de x.

Gabarito:

$\rightarrow$ Como $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$, temos que 2^x tem período 3 módulo 7.

$\rightarrow$ x^2 tem período 7 módulo 7.

Portanto, as soluções do problema têm período 21 (mmc (3,7)).

Agora, vamos analisar 2^x e x^2 módulo 7:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
x^2	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0
		$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$					$\uparrow$						

Veja que $2^x - x^2$ é múltiplo de 7 se, e somente se, $2^x \equiv x^2 \pmod 7$.

Analisando a tabela acima, veja que isso acontece quando $x \equiv 2, 4, 5, 6, 10, 15 \pmod{21}$

Então, a cada 21 números consecutivos, são 6 soluções.

Como $20.000 = 21.952 + 8$, temos:

(1) 952 <u>grupos completos</u> de 21, o que dá $952 \cdot 6 = 5.712$ soluções.

(2) 8 num <u>grupo incompleto</u>, o que dá 4 soluções (equivalentes a 2, 4, 5 e 8 módulo 21)

Portanto, não $5.712 + 4 = 5.716$ soluções.

Questão 08

Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

Gabarito:

Os demais $n - 1$ resultados são uma sequência de algarismos 4, 5 e 6 em ordem não decrescente. Logo, devemos determinar de quantos modos podemos escolher $n - 1$ algarismos do conjunto $\{4, 5, 6\}$ e, evidentemente, a repetição pode ocorrer. Essa escolha pode ser feita de

$$CR_{n-1,3} = C_{n+1,n-1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{(n+1)n}{2} \text{ maneiras.}$$

Agora, veja que só há 1 maneira de ordenar os números escolhidos (ordem não decrescente).

Como a probabilidade de um resultado ser 4 é 1/6 (e o mesmo vale para 5 e 6), a resposta é

$$\frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{1}{6^n}$$

<u>Comentário</u>: O aluno não precisa conhecer a fórmula de combinação com repetição. Sendo x, y e z as quantidades de algarismos 4, 5 e 6 (a partir do 2º algarismo tem-se $x + y + z = n - 1$. Toda solução (x, y, z), com x, y, z inteiros e não negativos pode ser escrita como uma sequência de $n - 1$ pontos e 2 sinais de $+$, o que dá $P_{n+1}^{2,n-1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)} = \frac{(n+1)n}{2}$ soluções.

Questão 09

Sejam o polinômio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k) / k \in \text{ e } k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1 / r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2 / q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Gabarito:

$\rightarrow$ Se $a \in A \cap B$, temos $p(x) - 1$ quadrado perfeito. $(a = p(x))$.

Veja que $p(x) - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e, após fatorar (vendo que $x = 1$ é raiz duas vezes), temos $p(x) - 1 = (x - 1)^2(2x + 1)$.

Como $(x - 1)^2$ é quadrado, devemos ter $2x + 1$ quadrado.

Sendo $x \leq 1999$, temos $2x + 1 \leq 3999$; portanto, $2x + 1$ é quadrado ímpar menor ou igual a 3999.

Então, $2x + 1 \in \{1, 3, 5, ..., 63\}$, o que dá 32 valores: $n(A \cap B) = 32$.

$\rightarrow$ Se $a \in A \cap C$, temos $p(x) - 2$ quadrado perfeito. $(a = p(x))$.

Veja que $p(x) - 2 = 2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3)$

Agora, precisamos que $2x - 3$ seja quadrado. Sendo $x \leq 1999$, temos $2x - 3 \leq 3995$; portanto, $2x - 3$ é quadrado ímpar menor ou igual a 3999.

Então, $2x - 3 \in \{1, 3, 5, ..., 63\}$, o que dá 32 valores: $n(A \cap C) = 32$.

Então, $y = n(A \cap B) - n(A \cap C) = 32 - 32 = 0$.

OBS.: Em nossa solução, consideramos 0 como natural.

Questão 10

Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Gabarito:

Desenvolvendo o determinante, encontramos:

$\Delta = (a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 – 3\,(a + b)(a + c)(b + c)$

$\Delta = 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 – (ab + ac + bc))$

Seja $x = a + b + c$.

Temos $x^2 = 4 + 2\,(ab + ac + bc)$, logo $ab + ac + bc = \dfrac{x^2 - 4}{2}$.

Portanto, $\Delta = 2x\left(4 - \dfrac{x^2 - 4}{2}\right) = 12x - x^3$.

Como queremos provar que $\Delta \leq 16$, analisaremos:

$p(x) = x^3 – 12x + 16$.

Veja que $x = 2$ é raiz de p; logo, $x – 2$ é fator e $p(x) = (x – 2)(x^2 + 2x – 8)$

Fatorando mais uma vez, $p(x) = (x – 2)^2\,(x + 4)$.

Para provar que $p(x) \geq 0$ e concluir o problema, precisamos provar que $x + 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq -4$.

Veja: $x^2 = a^2 + b + c^2 + 2(ab + ac + bc) \leq 3\,(a^2 + b^2 + c^2) = 12$ **(*)**

Logo $x \geq -2\sqrt{3} > -4$.

Em **(*)**, usamos que $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$, que decorre de $(a – b)^2 + (b – c)^2 + (c – a)^2 \geq 0$, $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$.

Comentários Finais

A prova de matemática deste ano pode ser considerada difícil e bastante trabalhosa.

Podemos classificar as questões 1, 3 e 8 como as mais fáceis, enquanto as questões 7 e 10 foram as mais difíceis.

Concluindo, podemos dizer que a prova selecionará os mais bem preparados, mantendo a tradição deste respeitado concurso.

Professores:

Celso Ramos, Carlos Augusto, Rodrigo Villard, Moyses Cohen, Carlos Eduardo Dias, Jordan Piva, Jorge Henrique e Felipe Rufino.