IME 2011/2012

GABARITO – DISCURSIVAS

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Professores:

Carlos Augusto
Celso Ramos
Daniel Fadel
Diego Alecyr
Fabio Dias Moreira
Felipe Rufino
Jorge Henrique Craveiro
Jordan Piva
Matheus Secco
Moyses Cohen
Rodrigo Villard

PENSI
Colégio e Curso

MATEMÁTICA

RASCUNHO

Questão 01

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão **r**, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão **q**, com **q** e **r** $\in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

(A) o menor valor possível para a razão **r**;
(B) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

Solução:

(A) Considere a PA onde o termo geral é dado por a_n. Assim, formamos a PG: (a_2, a_7, a_{27}).
Usando o termo geral da PA; formamos a PG $(a_2,\ a_2 + 5r,\ a_2 + 25r)$.

Usando $q = \dfrac{a_2 + 5r}{a_2} = \dfrac{a_2 + 25r}{a_2 + 5r} \rightarrow \cancel{a_2^2} + 10a_2r + 25r^2 = \cancel{a_2^2} + 25a_2r \rightarrow 25r^2 = 15a_2r \rightarrow \mathbf{5r = 3a_2}$ (pois $r \neq 0$ pelo enunciado).

Como $a_2 \in \mathbb{Z}$ e 5r é múltiplo de 3, então o menor valor da razão é $\mathbf{r = 3}$.

Como $r = 3$ e $a_2 = 5$, teremos $q = \dfrac{20}{5} = 4$, $q \in \mathbb{N}^*$, logo satisfaz ao enunciado.

(B) Como $r = 3$ e $a_2 = 5$, teremos $a_{18} = a_2 + 16r \rightarrow \mathbf{a_{18} = 53}$.

Obs.: A razão **q** poderia ser encontrada fazendo $q = \dfrac{a_7}{a_2} = \dfrac{a_{27}}{a_7} = \dfrac{a_{27} - a_7}{a_7 - a_2} = \dfrac{20r}{5r} = 4$ e é possível completar a solução a partir disso.

Questão 02

Os números reais positivos x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 - ax^2 = a^b - \frac{b}{2}x$, sendo $b \in \mathbb{N}$ (natural) $a \in \mathbb{R}$ (real) e $a \neq 1$. Determine, em função de **a** e **b**, o valor de $\log_a\left[x_1x_2x_3\,(x_1+x_2+x_3)^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right]^b$.

Solução:

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes do polinômio $x^3 - ax^2 + \frac{b}{2}x - a^b = 0$, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{b}{2}; \\ x_1x_2x_3 = a^b \end{cases}$$

Como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

temos que $x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right) = a^2 - b$

Logo:

$$\log_a\left[x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right]^b = \log_a\left[a^b\cdot(a)^{a^2-b}\right]^b = b\cdot\log_a\left[a^b\cdot a^{a^2-b}\right] =$$

$$b\cdot\left[\log_a a^b + \log_a a^{a^2-b}\right] = b\cdot\left[b\cdot\log_a a + (a^2-b)\cdot\log_a a\right] = b\cdot\left[b + a^2 - b\right] = a^2b$$

Questão 03

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são 105º, α e β. Sabendo que **m** $\in$ IR (real), determine:

(A) as raízes da equação 3 sec x + m ($\sqrt{3}$ cos x – 3 sen x) = 3 cos x + $\sqrt{3}$ sen x, em função de **m**;
(B) o valor de **m** para que α e β sejam raízes dessa equação.

1ª Solução:

(A) Como cos $x \neq 0$, podemos dividir tudo por cos x:

$$3\sec^2 x + m\left(\frac{\sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\,x}{\cos x}\right) = \frac{3\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 3\,(\tan^2 x + 1) + m\,(\sqrt{3} - 3\tan x) = 3 + \sqrt{3}\tan x \Leftrightarrow 3\tan^2 x - (3m + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3}\,m = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan x - \sqrt{3})\,.\,(\tan x - m) = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \tan x = m$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \arctan(m) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

(B) 105º + α + β = 180º (ângulos do triângulo) $\Rightarrow \alpha + \beta = 75^o$. (*)

Como α e β são agudos, temos que:

α deve pertencer à família $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).e

β deve pertencer à família arctan(m) + $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (ou o contrário).

Daí, α = 30º e, por (*), β = 45º.

Colocando em radianos, temos:

$\arctan(m) + k\pi = \frac{\pi}{4}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

É fácil ver que para $k \neq 0$, temos $\arctan(m) \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Logo, k = 0 e arctan(m) = $\frac{\pi}{4}$, o que implica m = 1.

Também há a possibilidade de α e β serem iguais, já que o enunciado não diz que α e β são as raízes. Nesse caso, deveríamos ter $\alpha = \beta$ = arctan(m). (pois se $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$, não teríamos um triângulo de ângulos α, β e 105º).

Como $\alpha + \beta = 75^o = \frac{5\pi}{12}$, temos $\alpha = \beta = \frac{5\pi}{24}$ e $m = \tan\frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$. (É fácil obter este valor usando a fórmula da tangente do arco dobro.)

Resposta: m = 1 ou $m = \tan\frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

2ª Solução para o item (A):

(A) $3\sec x + m(\sqrt{3}\,.\cos x - 3\,\text{sen}\,x) = 3\cos x + \sqrt{3}\,.\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow$

$$3\sec x + m\,.\,2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}.\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}.\,\text{sen}\,x\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos x\,.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\,\text{sen}\,x\right) \Leftrightarrow$$

$$3\sec x + m\,.\,2\sqrt{3}\,.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\,.\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$3\sec x = 2\sqrt{3}\left[\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m\,.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\cos x} = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m\,.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3} = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\,\frac{\pi}{3} - m\,.\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - m\,.\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3} + m}{2} = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - m\,.\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{m + \sqrt{3}}{2\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}\,.\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}\,.\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Seja $\theta = \arctan(m)$. Logo, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$ e $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Assim, $\dfrac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}\,.\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right).\cos\theta - \text{sen}\,\theta\,.\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$\text{sen}\,\theta\,.\cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\,.\cos\theta = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3} - \theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3} - \theta\right) \Leftrightarrow$$

$$2x + \frac{2\pi}{3} = (2k + 1)\pi \text{ ou } 2x - 2\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \theta + k\pi, \text{ onde } \theta = \arctan(m).$$

Questão 04

Seja o número complexo Z = a + bi, com a e b $\in \mathbb{R}$ (real) e i = $\sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que $\begin{cases} a^3 = 3(1+ab^2) \\ b^3 = 3(a^2b-1) \end{cases}$.

1ª Solução:

Sendo z = a + bi, calculemos z^3:

$z^3 = (a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\, i$

$\Rightarrow z^3 = 3 + 3i \Rightarrow \left|z^3\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} \Rightarrow \left|z\right|^3 = \sqrt{18} \Rightarrow \left|z\right| = \sqrt[6]{18}$

2ª Solução:

$$\begin{cases} a^3 = 3(1+ab^2) & \textbf{(1)} \\ b^3 = 3(a^2b-1) & \textbf{(2)} \end{cases}$$
$$\overline{(a+b)\,(a^2 - ab + b^2) = 3ab\,(a+b) \Rightarrow a + b = 0 \text{ ou } a^2 - 4ab + b^2 = 0}$$

1º caso: b = –a

Substituindo em **(1)**: $a^3 = 3(1 + a^3) \Rightarrow a = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Logo: $\left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[6]{18}$

2º caso: a^2 –4ab + b^2 = 0

Por Bhaskara: $a = b\,(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow a = b \text{ tg } 15° \text{ ou } a = b \text{ tg } 75°$ **(*)**

Sabe-se ainda que: $a = |z| \cos\theta$; $b = |z| \operatorname{sen}\theta$

Substituindo em **(1)**: $|z|^3 \cos^3\theta = 3.\ (1 + |z|^3 \cos\theta \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta)}_{1-\cos^2\theta} \Rightarrow |z|^3 \cdot \underbrace{(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)}_{\cos 3\theta} = |z|^3 \cdot \underbrace{\cos 3\theta}_{\geq 0} = 3$

Em (*): $\theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $\theta = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como $\cos 3\theta \geq 0$ só vale o primeiro, logo: $|z|^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3. \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[6]{18}$.

Questão 05

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Solução:

Seja P-ABC a pirâmide de base ABC e vértice P do enunciado. Seja O o centro do ΔABC. $PA = PB = PC = m$, $AB = BC = CA = \ell$, $PO = h$.

Pelo enunciado, os ângulos de vértice $A\hat{P}B = B\hat{P}C = C\hat{P}A = 30°$. Tem-se que o volume é dado por $V = \frac{1}{3}.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.h$.

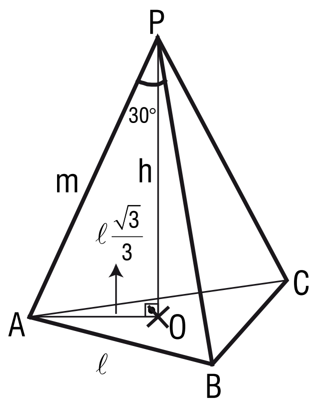
Queremos o raio do circuncírculo de ΔABC, e, por lei dos senos, tem-se que $\frac{AB}{\text{sen } 30°} = 2R$, logo queremos $R = \frac{AB}{2 \text{ sen } 30°} = AB = \ell$.

No ΔABC, $AO = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ e, no ΔPOA, temos por pitágoras: $PA^2 = PO^2 + OA^2$, logo $m^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{3}$.

Além disso, por lei dos cossenos no ΔPAB, temos $\ell^2 = m^2 + m^2 - 2m^2 \cos 30° = m^2 (2 - \sqrt{3})$, logo $m^2 = \ell^2 (2 + \sqrt{3})$.

Daí, $h^2 = \ell^2(\frac{5}{3} + \sqrt{3})$, logo $h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}$.

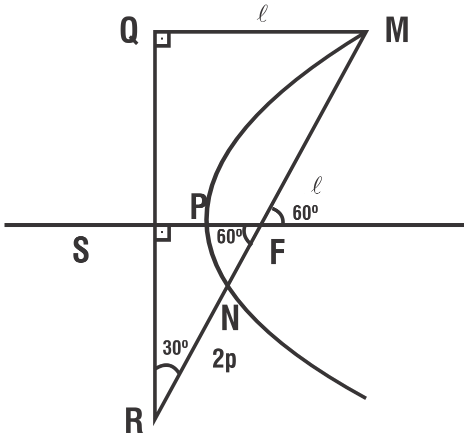
Logo, na relação de volume, temos $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}.\frac{\ell}{\sqrt{3}}\sqrt{5 + 3\sqrt{3}} = V$, logo $\ell = R = \sqrt[3]{6\sqrt{6\sqrt{3} - 10}\ V}$ é o circunraio desejado.



Questão 06

É dada uma parábola de parâmetro **p**. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de **p**, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

1ª Solução:



Seja S o ponto de interseção da diretriz com o eixo base da parábola.

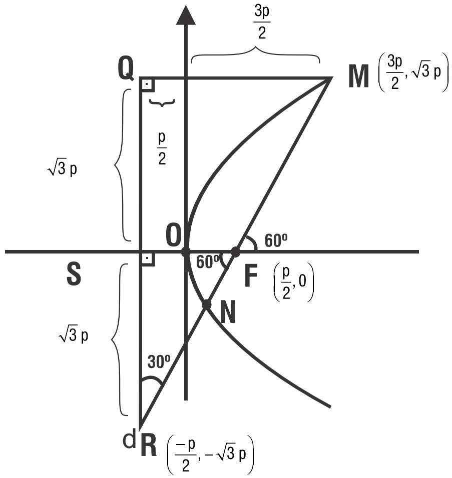
Por definição, FS = p. Como $S\hat{F}R = 60°$, então $F\hat{R}S = 30°$. No ΔRSF, $\text{sen } 30° = \dfrac{p}{RF} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow RF = 2p$.
Como M $\in$ parábola, MF = MQ = ℓ.
no ΔRQM,

$$\text{sen } 30° = \frac{\ell}{\ell + 2p} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ell = 2p \Rightarrow QM = 2p \Rightarrow RM = 4p$$

$$\cos 30° = \frac{RQ}{RM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{RQ}{4p} \rightarrow RQ = 2\sqrt{3}p$$

Assim, o perímetro do ΔMQR é RM + QM + RQ = $2p\,(3 + \sqrt{3})$.

2ª Solução:



Por definição, distância (F, QR) = p, então: $OF = \dfrac{p}{2}$

A reta MN tem coeficiente angular $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$ e passa pelo foco $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Assim a equação da reta MN é $y - 0 = \sqrt{3}\left(x - \dfrac{p}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x - \dfrac{\sqrt{3}p}{2}$

Para olhar as coordenadas de M, temos que fazer a interseção com a parábola:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = x\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}p}{2} \end{cases}$$

Substituindo:

$$\left(\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)^2 = 3x^2 - 3xp + \frac{3p^2}{4} = 2px$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 20xp + 3p^2 = 0$$

fazendo Bhaskara: $x = \dfrac{20p \pm \sqrt{400\,p^2 - 144p^2}}{24} \Rightarrow x = \dfrac{3p}{2}$ ou $x = \dfrac{p}{6}$

Pela figura, $x_m > x_n$, então: $x_n = \frac{3p}{2}$. Com isso, $y_m = \sqrt{3}\,\frac{3p}{2} - \frac{\sqrt{3}p}{2} \Rightarrow y_m = \sqrt{3}\,p$

Para olhar as coordenadas de R, temos que fazer $x = \frac{-p}{2}$ na equação de MN:

$$y_r = \sqrt{3}\left(\frac{-p}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}\,p}{2} \Rightarrow y_r = -\sqrt{3}p$$

Assim, $MQ = \frac{3p}{2} + \frac{p}{2} = 2p$

$$QR = \sqrt{3}\,p + \sqrt{3}\,p = 2\sqrt{3}\,p$$

$$MR = \text{distância }(M, R) = \sqrt{\left(\frac{3p}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}p + \sqrt{3}p\right)^2} = 4p$$

Logo, o perímetro do triângulo MQR é $2p + 4p + 2\sqrt{3}\,p = 2p(3 + \sqrt{3})$.

Questão 07

Sejam r e s $\in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que $(2r + 3s)$ é múltiplo de 17 se e somente se $(9r + 5s)$ é múltiplo de 17.

1ª Solução:

Como m.d.c (4,17) = 1, temos que $2r + 3s \equiv 0$ (mód17) $\Leftrightarrow 8r + 12s \equiv 0$ (mód 17). Mas, $17r + 17s \equiv 0$ (mód 17), donde $(8r + 12s) \equiv 0$ (mód 17) $\Leftrightarrow 9r + 5s \equiv 0$ (mód 17).

2ª Solução:

Como $4(2r + 3s) + (9r + 5s) = 17(r + s)$, temos que $17 | 4(2r + 3s) \Leftrightarrow 17 | 9r + 5s$.
Mas m.d.c (4, 17) = 1, o que dá $17 | (2r + 3s) \Leftrightarrow 17 | 4(2r + 3s) \Leftrightarrow 17 | 9r + 5s$.

3ª Solução:

(Ida)
$2r + 3s = 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$
Então, $r = \frac{17k - 3s}{2}$ e, daí, $9r + 5s = 9\left(\frac{17k - 3s}{2}\right) + 5s = 17\left(\frac{9k - s}{2}\right)$. Como esse número é inteiro e 2 e 17 não têm fatores comuns, temos que 2 divide 9k - s. Daí, 17 divide $9r + 5s$.

(Volta)
$9r + 5s = 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$
Então, $r = \frac{17k - 5s}{9}$ e, daí, $2r + 3s = 2\left(\frac{17k - 5s}{9}\right) + 3s = 17\left(\frac{2k + s}{9}\right)$. Como esse número é inteiro, e 9 e 17 não têm fatores comuns, temos que 9 divide $2k + s$. Daí, 17 divide $2r + 3s$.

Questão 08

Calcule as raízes de f(x) em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

1ª solução:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$, usando Jacobi $C_1 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix}$$

Usando Chió: $f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix}$

Novamente vamos usar Jacobi: $C_1 = C_1 + C_3$ e $C_2 = C_2 + C_3$.

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x+b-a-c & 0 & b-c \\ 0 & x+a-b-c & a-c \\ x+b-a-c & x+a-b-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x+a+b+c)\,(x+b-a-c)\,(x+a-b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & a-c \\ 1 & 1 & x-c \end{vmatrix}$$

Por fim, vamos fazer Chió: $\begin{vmatrix} 1 & a-c \\ 1 & x-b \end{vmatrix} = (x+c-a-b)$

$f(x) = (x + a + b + c)\,(x + b - a - c)\,(x + a - b - c)\,(x + c - a - b)$

As raízes são $x = -a - b - c$; $x_2 = -a + b + c$; $x_3 = -b + a + c$; e $x_4 = -c + a + b$.

2ª solução:

Defina $A = \begin{bmatrix} x & a \\ a & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b & c \\ c & b \end{bmatrix}$.

É fácil verificar que A e B comutam $\left(AB = BA = \begin{bmatrix} bx + ac & cx + ab \\ cx + ab & bx + ac \end{bmatrix} \right)$.

Logo $f(x) = \det \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$

$= \det (A^2 - B^2) = \det(A+B) \cdot \det(A - B) =$

$= [(x+b)^2 - (a+c)^2] \cdot [(x - b)^2 - (a - c)^2] =$

$= (x + a + b + c)\ (x - a + b - c)\ (x + a - b - c)\ (x - a - b + c)$

Logo as raízes de f são $\{- a - b - c,\ a - b + c,\ - a + b + c,\ a + b - c\}$

(Usamos o fato: "se A, B, C, D são matrizes n x n, $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ é uma matriz 2n x 2n e $AC = CA$, então:

$\det X = \det (AD - BC)$").

Questão 09

Considere uma reta **r** que passa pelo ponto P(2,3). A reta **r** intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B. Determine:

(A) o lugar geométrico definido pela curva;
(B) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$.

Solução:

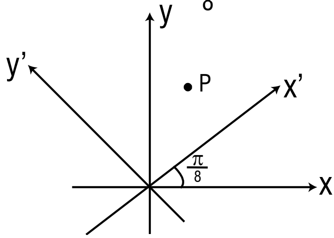
(A)
$$x^2 - 2xy - y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy - x^2 = 0$$

equação do segundo grau em $y: y = -\dfrac{2x \pm \sqrt{8x^2}}{2}$

$y = (\sqrt{2} - 1)x$ ou $y = (-\sqrt{2} - 1)x$

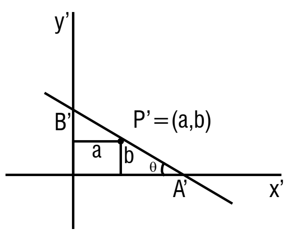
É um par de retas perpendiculares que passam pela origem (uma hipérbole degenerada).

(B)
As retas do item anterior são perpendiculares, portanto, considere um sistema de coordenadas no qual o eixo x' é a reta $y = (\sqrt{2} - 1)x$ (no sistema original) e o eixo y' é a reta $y = (-\sqrt{2} - 1)x$ (no sistema original).
Repare que $\sqrt{2} - 1 = \tan\dfrac{\pi}{8}$, logo, o ângulo de rotação é $\dfrac{\pi}{8}$.



O ponto P = (2, 3) no sistema é dado por $P' = \left(2\cos\dfrac{\pi}{8} + 3\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}, -2\,\text{sen}\dfrac{\pi}{8} + 3\cos\dfrac{\pi}{8}\right) = (a,b)$. **(*)**

Seja θ o ângulo que a reta faz com o eixo x' (suponha que a reta é decrescente inicialmente).



Seja m = tan θ. É fácil ver que $P'A' = \frac{b\sqrt{m^2+1}}{m}$ e $P'B' = a\sqrt{m^2+1}$

Daí, $PA \cdot PB = P'A' \cdot P'B' = \frac{ab(m^2+1)}{m}$. **(**)**

Em **(*)**, temos $ab = \left(2\cos\frac{\pi}{8} + 3\,\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)\left(-2\,\text{sen}\frac{\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{8}\right) = 6\left(\cos^2\frac{\pi}{8} - \text{sen}^2\frac{\pi}{8}\right) + 5\,\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} =$

$= 6\cos\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}\text{sen}\frac{\pi}{4} = 6\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{4}.$

Em (**): $\frac{17\sqrt{2}}{4}\left(\frac{m^2+1}{m}\right) = 17 \Leftrightarrow m^2 - 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{2} \pm 1$

$$\Leftrightarrow m = \tan\frac{\pi}{8} \text{ ou } m = \tan\frac{3\pi}{8}.$$

Caso a reta seja decrescente, os argumentos são análogos e chegamos a $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2} \pm 1 \Leftrightarrow m$

$\Leftrightarrow m = \tan\frac{5\pi}{8}$ ou $m = \tan\frac{7\pi}{8}$.

Então, as inclinações possíveis em x'y' são $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$.

Para termos as inclinações xy, basta subtrair $\frac{\pi}{8}$, obtendo $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Como a reta passa por (2,3), logo, as opções são:

inclinação	reta
0	y = 3
$\frac{\pi}{4}$	y = x + 1
$\frac{\pi}{2}$	x = 2
$\frac{3\pi}{4}$	y = – x + 5

Resposta: y = 3, y = x + 1, x = 2, y = – x + 5.

Questão 10

Os nove elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou – 1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

(A) o maior valor possível para o determinante de M;
(B) a probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

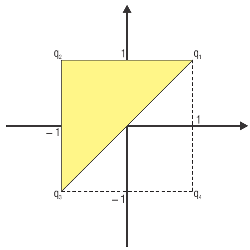
1ª Solução:

Se det M = k, det (– M) = – k (já que a ordem de ordem de M é ímpar). Logo $\max_M \{\det M\} = \max_M \{|\det M|\}$ e, para k > 0, o número de soluções de det M = k é metade do número de soluções de | det M | = k.

Multiplicando linhas por – 1, podemos transformar M em uma matriz da forma $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ sem alterar | det M |.

Mas o módulo do determinante de uma matriz desta forma é o dobro da área do triângulo determinado pelos pontos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3)$.

(A) Os pontos p_1, p_2 e p_3 pertencem ao conjunto Q = {(1, 1), (– 1, 1), (– 1, – 1), (1, – 1)}, compostos dos vértices de um quadrado de lado 2.
Todo triângulo composto de vértices de Q ou é degenerado (tem dois vértices iguais) ou é retângulo isósceles com catetos de comprimento 2. Logo a área do triângulo $p_1p_2p_3$ é no máximo 2, e portanto det M é no máximo 4, atingido por exemplo na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.



(B) A cada triângulo $p_1p_2p_3$ de área 2 estão associadas exatamente 2^3 matrizes M tais que | det M | = 4 (pois cada linha de M pode ou não ser multiplicada por – 1 independentemente). Existem $\binom{4}{3} \cdot 3! = 24$ escolhas de (p_1, p_2, p_3) que não geram triângulos degenerados, logo existem 192 matrizes M tais que | det M | = 4. Metade, isto é, 96 matrizes, satisfazem det M = 4. Como existem 2^9 matrizes possíveis e todas ocorrem com a mesma probabilidade, a probabilidade de que M tenha o determinante máximo é $\frac{96}{2^9} = \frac{3}{16}$.

2ª Solução:

Se $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $\det M = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$. Como todos os termos da matriz pertencem a

$\{+1, -1\}$, aei, bfg, cdh, ceg, bdi, afh $\in \{+1, -1\}$, o que imediatamente implica que det M é par e det M ≤ 6.

(A) Se det M = 6, devemos ter $\begin{cases} aei = 1 & (I) \\ bfg = 1 & (II) \\ cdh = 1 & (III) \\ ceg = -1 & (IV) \\ bdi = -1 & (V) \\ afh = -1 & (VI) \end{cases}$

Multiplicando I, II e III, obtemos abcdefghi = 1. Mas multiplicando IV, V e VI, obtemos abcdefghi = – 1, o que é uma contradição. Logo det M ≤ 4, e o máximo é atingido, e.g. em $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) Na tabela abaixo, o produto das linhas corresponde aos termos positivos do determinante e o produto das colunas corresponde aos termos negativos do determinante:

a	e	i	+
f	g	b	+
h	c	d	+
–	–	–	

Para que det M = 4, cinco termos (incluindo os respectivos sinais) devem ser +1, enquanto outro deve ser – 1. Logo existem seis possibilidades para a tabela:

			– 1
			+1
			+1
– 1	– 1	– 1	

I

			+1
			– 1
			+1
– 1	– 1	– 1	

II

			+1
			+1
			– 1
– 1	– 1	– 1	

III

			+1
			+1
			+1
+1	– 1	– 1	

IV

			+1
			+1
			+1
– 1	+1	– 1	

V

			+1
			+1
			+1
– 1	– 1	+1	

VI

Note que é possível estabelecer uma bijeção entre tabelas do tipo I e tabelas do tipo II:

a	e	i	– 1
f	g	b	+1
h	c	d	+1
– 1	– 1	– 1	

$\rightleftarrows$

f	g	b	+1
a	e	i	– 1
h	c	d	+1
– 1	– 1	– 1	

I — II

Analogamente, é possível definir bijeções entre I e II, IV e V e IV e VI. Também existe uma bijeção entre I e IV:

a	e	i	– 1
f	g	b	+1
h	c	d	+1
– 1	– 1	– 1	

$\rightleftarrows$

– a	– f	– h	+1
– e	– g	– c	+1
– i	– b	– d	+1
+1	– 1	– 1	

I — IV

Logo o número de soluções de det M = 4 é seis vezes o número de tabelas do tipo I.
Existem quatro possibilidades para a primeira linha da tabela.

Caso A: (– 1, +1, +1), (+1, – 1, +1), (+1, +1, –1)
Mediante uma permutação das colunas da tabela, podemos supor que a primeira linha é (– 1, +1, +1) e a resposta será três vezes a resposta para esse caso particular.
Temos então que a tabela é:

– 1	+1	+1	– 1
f	g	b	+1
h	c	d	+1
– 1	– 1	– 1	

Podemos supor, permutando a segunda e a terceira linha se necessário, que b = – 1 (a permutação introduz mais um fator 2 na resposta). A tabela até então é:

– 1	+1	+1	– 1
f	g	– 1	+1
h	c	+1	+1
– 1	– 1	– 1	

O caso g = +1 e o caso g = – 1 levam a uma solução cada:

– 1	+1	+1	– 1
– 1	+1	– 1	+1
– 1	– 1	+1	+1
– 1	– 1	– 1	

– 1	+1	+1	– 1
+1	– 1	– 1	+1
+1	+1	+1	+1
– 1	– 1	– 1	

Logo o total de soluções do caso A é 3 x 2 x (1 + 1) = 12.

Caso B: (– 1, – 1, – 1)

Neste caso, a tabela é:

– 1	– 1	– 1	– 1
f	g	b	+1
h	c	d	+1
– 1	– 1	– 1	

Olhando para as colunas, h = f, c = g e d = b. Como existem quatro soluções para a segunda linha (+1, +1, +1), (– 1, – 1, +1), (– 1, +1, –1) e (+1, – 1, – 1), o caso B tem 4 soluções.
Logo a tabela I pode ser preenchida de 12 + 4 = 16 formas diferentes, e portanto existem 6 x 16 = 96 matrizes M com det M = 4.
Existem $2^9 = 512$ possibilidades para a matriz M; como todas são igualmente prováveis, a probabilidade de que det M = 4 é $\frac{96}{512} = \frac{3}{16}$.

Comentários Finais:

Ao contrário dos anos mais recentes, neste ano, tivemos uma prova extremamente trabalhosa, com algumas questões necessitando de soluções realmente extensas.

A prova foi abrangente, já que foram cobrados conceitos de Progressões, Polinômios, Logaritmos, Trigonometria, Complexos, Geometria (plana, espacial e analítica), Divisibilidade, Determinantes e Probabilidade.

Podemos classificar as questões 1, 2 e 7 como as mais fáceis, enquanto que as questões 3, 9b e 10 foram as mais difíceis.

Concluindo, gostaríamos de parabenizar a banca de Matemática do IME, que selecionará os candidatos mais bem preparados.

RASCUNHO