GABARITO IME 2013
DISCURSIVAS

PROVA DE
MATEMÁTICA

PENSI
Ponto de Ensino

1ª QUESTÃO

O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

Gabarito:

Fatorando $P(x)$:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243 =$$
$$= x^4 (x-3) + 10x^2(x-3) + 81(x-3) =$$
$$= (x^4 + 10x^2 + 81)(x-3)$$

Logo as raízes são $x = 3$ ou x tal que $x^4 + 10x^2 + 81 = 0$.

Resolvendo a biquadrada:

$$x^4 + 10x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{-224}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{14}\,i = \left(\sqrt{2} \pm \sqrt{7}i\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{2} \pm \sqrt{7}i\right)^2 \Rightarrow x = \pm\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{7}i\right)$$

$$S = \left\{3;\ \sqrt{2} + \sqrt{7}i;\ \sqrt{2} - \sqrt{7}i;\ -\sqrt{2} + \sqrt{7}i;\ -\sqrt{2} - \sqrt{7}i\right\}.$$

Obs. 1: Caso o candidato não fatorasse diretamente o polinômio, ele poderia utilizar o teste das raízes racionais:

Testando $x = 3$:

$$P(3) = 3^5 - 3 \cdot 3^4 + 10 \cdot 3^3 - 30 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 243 = 0.$$

Pelo algoritmo de Briot-Ruffini:

	1	– 3	10	– 30	81	– 243
3	1	0	10	0	81	0

Donde $P(x) = (x-3)(x^4 + 10x^2 + 81)$

Obs. 2: O texto provavelmente tinha a intenção de auxiliar os candidatos na obtenção da raíz $x = 3$ dizendo que as raízes eram complexas e simétricas. Porém, ao fazer, não mencionou que as raízes eram complexas NÃO REAIS.
Caso tivesse mencionado o candidato poderia usar que as raízes são: $a + bi$, $a - bi$, $-a + bi$, $-a - bi$, r e depois usar Girard.

2ª QUESTÃO

Calcule o determinante abaixo, no qual $w = cis\,\dfrac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & w & 0 & i \\ i & 1 & -i & w^2 \\ 1-i & w & i-1 & 1 \\ 0 & w & 1 & i \end{vmatrix}$$

Gabarito:

1ª Solução:

Pelo teorema de Jacobi:

Fazendo $C'_3 := C_3 + C_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & w & 1 & i \\ i & 1 & 0 & w^2 \\ 1-i & w & 0 & 1 \\ 0 & w & 1 & i \end{vmatrix}$$

Fazendo $C'_2 := C_2 - wC'_3$, $C'_4 := C_4 - iC'_3$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 & w^2 \\ 1-i & w & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Fazendo Laplace na 4ª linha:

$$D = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & w^2 \\ 1-i & w & 1 \end{vmatrix}$$

Fazendo Laplace na 1ª linha:

$$D = -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & w^2 \\ w & 1 \end{vmatrix} = w^3 - 1$$

Mas $w^3 = cis\,2\pi = 1$, logo $D = 0$.

2ª Solução:

Observe que $w(w+i)\cdot(L_1 - L_4) + L_2 - w^2 \cdot L_3 = (0,0,0,0)$. Logo as quatro linhas da matriz são linearmente dependentes e seu determinante é zero.

3ª QUESTÃO

Determine o(s) valor(es) de x, inteiro(s) e positivo(s), que satisfaz(em) a equação

$$x^2 = \sum_{y=1}^{x}\left[\prod_{z=0}^{y-1}(y-z)\right]$$

Gabarito:

1ª solução:

Primeiro, note que $\prod_{z=0}^{y-1}(y-z) = (y-0)\ (y-1)\ (y-2)\ \dots\ (y-(y-1)) = y!$

Logo, a equação se reduz a:

$x^2 = \sum_{y=1}^{x} y! \Leftrightarrow x^2 = 1! + 2! + 3! + \dots + x!$

$x = 1 \Rightarrow 1^2 = 1!$
$x = 2 \Rightarrow 2^2 \neq 1! + 2!$
$x = 3 \Rightarrow 3^2 = 1! + 2! + 3!$

Logo, $x = 1$ e $x = 3$ são soluções.

Finalmente, observe que $1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3$ (mód 10) e que, para $x > 4$, $x! \equiv 0$ (mód 10), e por isso $1! + 2! + \dots + x! \equiv 3$ (mód 10). Logo, para $x \geq 4$, não há solução inteira pois 3 não é quadrado módulo 10.
As soluções, portanto, são $x = 1$ ou $x = 3$.

2ª solução:

Reescrevendo a equação como $x^2 = \sum_{y=1}^{x} y!$, e observando que $x = 1$ e $x = 3$ são soluções, podemos mostrar que tais soluções são as únicas. Pelo princípio de indução finita, mostraremos que, para $x \geq 4$:

$$x^2 < x!$$

1º) $x = 4 \Rightarrow 4^2 < 4!$
2º) Suponha que $k^2 < k!$, para algum k inteiro positivo.
Por essa hipótese:
$(k + 1)! = (k + 1)k! > (k + 1)k^2 >^* (k + 1)\ (k + 1) = (k + 1)^2$.

Logo, pelo PIF, temos que $x^2 < x!$ para $x \geq 4$ e então a equação $x^2 = \sum_{y=1}^{x} y!$ possui as únicas soluções $x = 1$ e $x = 3$, já que o lado direito é maior que o lado esquerdo quando $x \geq 4$.

*usamos que $k \geq 4$ implica $k^2 > k + 1$. Isso acontece para todo $k > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3ª solução:

Veja que $x = 1$ é solução. Para $x > 1$, o lado direito é maior que $x!$ Logo, $x^2 > x!$

Daí, $x > (x-1)!$

Para $x \geq 5$, temos $(x-1)! > (x-1)(x-2)$, daí, $x > (x-1)(x-2)$.

Isso nos dá $x^2 - 4x + 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 2$, que não é possível para $x \geq 5$.

Portanto, $x \leq 4$.

Testando os valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, vemos que $S = \{1; 3\}$.

4ª QUESTÃO

Resolva a equação $(\log_{\cos x} \text{sen}^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} \text{sen} x) = 4$

Gabarito:

$(\log_{\cos x} \text{sen}^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} \text{sen} x) = 4$

Restrições:

$$\begin{cases} \text{sen } x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Usando as propriedades do logaritmo:

$$\left(\cancel{2} . \log_{\cos x} \text{sen } x\right) \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \log_{\cos x} \text{sen } x\right) = 4$$

$$\left(\log_{\cos x} sen\ x\right)^2 = 4 \Rightarrow \log_{\cos x} sen\ x = \pm 2$$

(I) $\log_{\cos x} \text{sen } x = 2 \Rightarrow \text{sen } x = \cos^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, pois x está no 1º quadrante

ou

$\text{sen } x = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \varnothing$ (pela restrição).

(II) $\log_{\cos x} \text{sen x} = -2 \Rightarrow \text{sen } x = \cos^{-2} x \Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos^2 x = 1$

$S = \varnothing$, pois, pela restrição, $0 < \text{sen } x < 1$ e $0 < \cos^2 x < 1 \Rightarrow 0 < \text{sen } x \cdot \cos^2 x < 1$.

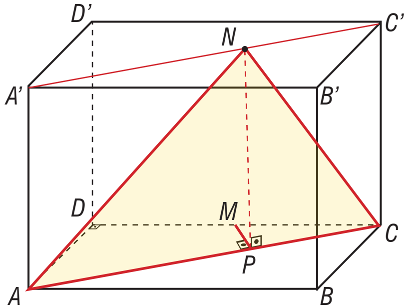
Então, $x = \text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

5ª QUESTÃO

Seja *ABCDA'B'C'D'* um prisma reto de base retangular *ABCD*. Projeta-se o ponto médio *M* da maior aresta da base sobre a diagonal *AC*, obtendo-se o ponto *P*. Em seguida projeta-se o ponto *P* na face oposta, obtendo-se o ponto *N*. Sabe-se que $\left|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2\right| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

Gabarito:

Considere AD < DC.



Seja $DM = MC = x$.

Note que $\Delta PCM \sim \Delta ADC$ (pois existem dois ângulos retos e um ângulo em comum).

Por semelhança: $\dfrac{\overline{PC}}{2x} = \dfrac{x}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{PC} \cdot \overline{AC} = 2x^2$

Por Pitágoras nos ΔAPN e ΔPCN:

$$\begin{cases} \overline{AN}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{AP}^2 \\ \overline{NC}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PC}^2 \end{cases} \Rightarrow \left|\overline{AN}^2 - \overline{NC}^2\right| = \left|\overline{AP}^2 - \overline{PC}^2\right|$$

Logo: $\left|\overline{AN}^2 - \overline{NC}^2\right| = \left|\left(\overline{AC} - \overline{PC}\right)^2 - \overline{PC}^2\right| = \left|\overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{AC}\right| =$

$= \left|\overline{AC}^2 - 4x^2\right| = \left|\overline{AD}^2\right| = k \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{k}.$

6ª QUESTÃO

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{\text{89 algarísmos}} - \underbrace{11\ldots1}_{\text{30 algs "1"}}\;\underbrace{00\ldots0}_{\text{30 algs "0"}}}$$

Obs: algs=algarismos

Gabarito:

1ª solução:

$$E=\sqrt[3]{\underbrace{37037\ldots037}_{89\text{ alg.}}-\underbrace{1\ldots1}_{30\text{ alg.}}\,\underbrace{00\ldots0}_{30\text{ alg.}}}$$

Vamos calcular cada parte da subtração dentro da raiz cúbica:

* $\underbrace{37037\ldots037}_{89\text{ algarismos}}=37\cdot10^{87}+37\cdot10^{84}+\ldots+37$

$$=37\underbrace{\left(10^{87}+10^{84}+\ldots+1\right)}_{\substack{\text{P.G.: } q=10^3,\ n=30\\ a_1=1}}$$

$$=\frac{37\left(\left(10^3\right)^{30}-1\right)}{10^3-1}\qquad(i)$$

* $\underbrace{11\ldots1}_{30\text{ alg.}}\,\underbrace{00\ldots0}_{30\text{ alg.}}=10^{59}+10^{58}+\ldots+10^{30}$

P.G.: $q=10$
$a_1=10^{30}$, $n=30$

$$=10^{30}\frac{\left(10^{30}-1\right)}{10-1}\qquad(ii)$$

Substituindo (i) e (ii) na expressão E:

$$E=\sqrt[3]{37\frac{\left(\left(10^3\right)^{30}-1\right)}{10^3-1}-\frac{10^{30}\left(10^{30}-1\right)}{10-1}}$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{37\cdot\left[\left(10^{30}\right)^3-1\right]-111\cdot10^{30}\left(10^{30}-1\right)}{999}}$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{1}{27}\left[\left(\left(10^{30}\right)^3-1\right)-3\cdot10^{30}\left(10^{30}-1\right)\right]}$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{1}{27}\left[\left(10^{30}\right)^3-3\cdot\left(10^{30}\right)^2+3\cdot10^{30}-1\right]}=\sqrt[3]{\frac{\left(10^{30}-1\right)^3}{27}}=\frac{10^{30}-1}{3}=\overbrace{33\ldots3}^{30\text{ alg. 3's}}$$

2ª solução:

Primeiro, veja que $\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ algarismos}}=\dfrac{\overbrace{1111\ldots1}^{90\text{ alg}}}{3}$.

Então, façamos $x=\underbrace{111\ldots1}_{30\text{ alg}}=\dfrac{10^{30}-1}{9}$

Assim, veja que $\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ alg}}=\dfrac{\left(10^{60}+10^{30}+1\right)x}{3}$.

Daí, a expressão dentro da raiz cúbica é

$$\frac{\left(10^{60}+10^{30}+1\right)x}{3}-10^{30}x=\frac{\left(10^{60}-2\cdot 10^{30}+1\right)x}{3}=\frac{\left(10^{30}-1\right)^2 x}{3}$$

$$=\frac{\left(10^{30}-1\right)^2}{3}\frac{\left(10^{30}-1\right)}{9}=\frac{\left(10^{30}-1\right)^3}{27}.$$

Então, a raíz cúbica é $\dfrac{10^{30}-1}{3}=33\ldots 3$ com 30 dígitos.

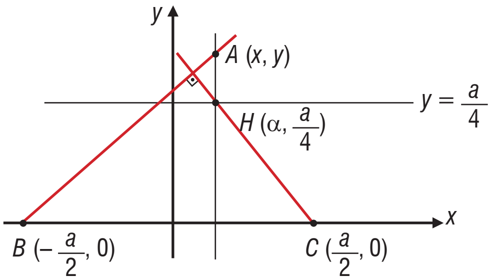
7ª QUESTÃO

O lado $\overline{BC}$ de um triângulo *ABC* é fixo e tem comprimento α. O ortocentro *H* do triângulo percorre uma reta paralela à reta suporte de $\overline{BC}$ e distante $a/4$ da mesma.

(A) Determine o lugar geométrico do ponto *A* quando *H* varia.
(B) Determine o valor mínimo da área do triângulo *ABC* quando *A* e *H* estão no mesmo semi-plano definido pela reta suporte de $\overline{BC}$.

Gabarito:

Escolhendo eixos como na figrura:



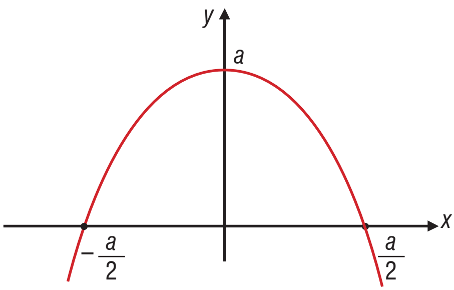
(A) $H \in$ reta dada $\Leftrightarrow H = \left(\alpha, \dfrac{a}{4}\right); \alpha \in \mathbb{R}$

A (x, y) é vértice $\Leftrightarrow$ AH$\perp$ BC e CH$\perp$AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ m_{CH}\cdot m_{AB}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{a/4}{\alpha-a/2}\cdot\dfrac{y}{x+a/2}=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4}\cdot y=\frac{a^2}{4}-x^2$$

$$\Leftrightarrow y=a-\frac{4}{a}x^2$$



Escrevendo como $y - a = -\frac{4}{a}x^2$

$x^2 = -\frac{a}{4}\left(y - a\right)$ é uma parábola de vértice (0,a) e parâmetro $p = a/8$.

(exceto os vértices B, C, quando ΔABC degeneraria)

(B) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left|a - \frac{4}{a}x^2\right|$

A e H estão no mesmo semiplano $\Leftrightarrow \frac{a}{4} \cdot y > 0$

Observando o gráfico, vemos que não existe área mínima.
A área pode ficar tão pequena quanto se queira $\left(x \to a/2\right)$, mas S = 0

implicaria C = A ou C = B, i.e., não haveria triângulo.

Nota: O enunciado provavelmente queria dizer área máxima (que no caso é $a^2/2$).

8ª QUESTÃO

Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode ser organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas)

Gabarito:

1ª Solução:
Dividiremos o problema em casos de acordo com o número x de grupos de 2 alunos:

Caso 1: $x = 0$:
1 maneira

Caso 2: $x = 1$:

Escolha do único grupo de 2 alunos: $\binom{9}{2} = 36$ maneiras

Caso 3: $x = 2$:

Escolha dos dois grupos de 2 alunos: $\frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2}}{2!} = \frac{36 \cdot 21}{2} = 378$ maneiras

(dividimos por 2!, pois cada configuração foi contada 2! vezes)

Caso 4: $x = 3$:

Escolha dos três grupos de 2 alunos: $\dfrac{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}}{3!} = \dfrac{36\cdot 21\cdot 10}{6} = 1260$

(dividimos por 3! por um motivo análogo ao usado no caso anterior)

Caso 5: $x = 4$:

Escolha dos quatro grupos de 2 alunos: $\dfrac{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}}{4!} = \dfrac{36\cdot 21\cdot 10\cdot 3}{24} = 945$

(dividimos por 4! por um motivo análogo ao usado no caso anterior)

TOTAL: $36 + 378 + 1260 + 945 = 2620$ alunos

2ª Solução:

Seja x_n o número de maneiras de se organizar o teste surpresa em uma turma de n alunos. Calcularemos x_{n+2} em função de x_{n+1} e x_n.

Para isso, considere uma turma de $n+2$ alunos e um aluno A. Temos dois casos: **A** fará o trabalho sozinho ou **A** fará o trabalho em grupo.

No primeiro caso, pode-se dividir o restante da turma de x_{n+1} maneiras e no segundo caso, temos $(n+1)$ maneiras de se escolher o estudante no grupo de **A** e x_n maneiras de dividir o restante da turma.

Logo, $x_{n+2} = x_{n+1} + (n+1)x_n$. Os casos iniciais são $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 10$.

Daí, $x_5 = x_4 + 4x_3 = 26$, $x_6 = x_5 + 5x_4 = 26 + 50 = 76$, $x_7 = x_6 + 6x_5 = 232$, $x_8 = x_7 + 7x_6 = 764$, $x_9 = x_8 + 8x_7 = 2620$.

9ª QUESTÃO

Resolver o sistema de equações $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5.4^y \end{cases}$

Gabarito:

1ª Solução:

Em (I): $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x}$, temos que x e y devem ser positivos.

- Se $x > y$, veja que $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ e $\log_3 \dfrac{y}{x} < \log_3 1 = 0$. Então, como os membros da equação têm sinais diferentes, não há solução.
- Analogamente, se $x < y$ não há solução.
  Portanto, $x = y$.

Substituindo em (II), ficamos com $2^{x+2} + 8^x = 5 . 4^x$, que equivale a $4 . 2^x + (2^x)^3 = 5(2^x)^2$.
Seja $t = 2^x > 0$.

Temos $4t + t^3 = 5t^2 \Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (t-1) \cdot (t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 4$ (já que $t > 0$)

$t = 1: x = 0$ (impossível pelas condições de existência do problema)
$t = 4: x = 2, y = 2$

$S = \{(2,2)\}$

2ª Solução:
A equação equivale a $\sqrt{x} + \log_3 x = \sqrt{y} + \log_3 y$.
Fazendo $f(t) = \sqrt{t} + \log_3 t$, é fácil ver que f é uma função crescente, pois é soma de duas funções crescentes. Daí, f é injetora e segue que $x = y$ e finalizamos como na solução 1.

Obs.: Caso o aluno não visse diretamente que f é crescente, era possível calcular sua derivada f e provar que ela é positiva para $t > 0$.

10ª QUESTÃO

Sejam p o perímetro de um triângulo, S sua área, r e R os raios de suas circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente. Demonstre que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}S \leq r.R \leq \frac{2p^2}{27}$$

Gabarito:
Sejam (I) a desigualdade da esquerda e (II) a da direita. Vamos provar (II) inicialmente:

1ª solução para a desigualdade II:

Lembrando que $r = \frac{S}{p}$ e $R = \frac{abc}{4S}$, temos $rR = \frac{abc}{4p}$.

Então, (II) $\Leftrightarrow \frac{abc}{4p} \leq \frac{2p^2}{27} \Leftrightarrow 8p^3 \geq 27abc \Leftrightarrow \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \geq abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, que é a famosa desigualdade das médias para 3 termos a, b, c positivos. (como utilizamos o conectivo $\Leftrightarrow$, podemos ler ao contrário e o problema está finalizado).

1ª solução para a desigualdade I:

Usando que $S = pr$, veja que $\frac{2\sqrt{3}}{9}S \leq r \cdot R$ equivale a $\frac{2\sqrt{3}}{9}p \leq R$.

Lembrando que $p = \frac{a+b+c}{2}$ e $\begin{cases} a = 2R \text{ sen } A \\ b = 2R \text{ sen } B \\ c = 2R \text{ sen } C \end{cases}$, queremos provar que $\frac{2\sqrt{3}}{9}(\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C) \leq 1$,

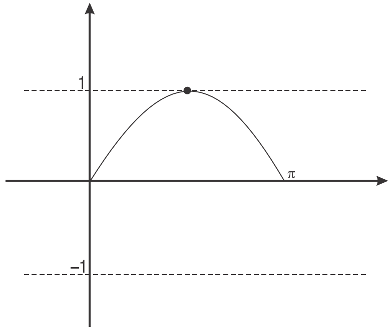
ou seja, $\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Considere o gráfico ao lado de $f(t) = \text{sen}\, t$ no intervalo $[0, \pi]$. Veja que f tem concavidade para baixo no intervalo, logo podemos utilizar a desigualdade de Jensen:

$$\frac{\text{sen}\, A + \text{sen}\, B + \text{sen}\, C}{3} \le \text{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) =$$

$$= \text{sen}\, 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e segue que}$$

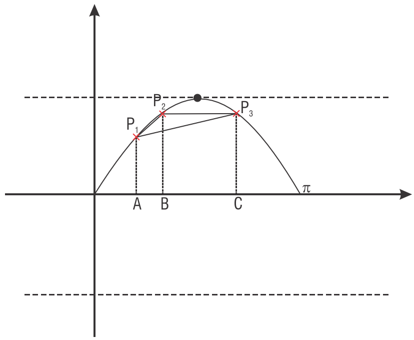
$$\text{sen}\, A + \text{sen}\, B + \text{sen}\, C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



Observação 1:

Para entender a desigualdade de Jensen para 3 termos, considere no gráfico ao lado os pontos $P_1 = (A, \text{sen}\, A)$, $P_2 = (B, \text{sen}\, B)$, $P_3 = (C, \text{sen}\, C)$.

Como a concavidade é voltada para baixo, o baricentro G do $\Delta P_1P_2P_3$ está abaixo da curva. Por isso, $y_G \le f(x_G)$. Veja que isso equivale a $\dfrac{\text{sen}\, A + \text{sen}\, B + \text{sen}\, C}{3} \le \text{sen}\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)$.



Observação 2:

É simples provar que a tripla (A_0, B_0, C_0) tal que $\text{sen}\, A + \text{sen}\, B + \text{sen}\, C\,|_{A+B+C=180^{\circ}}$ é máxima satisfaz

$A_0 = B_0 = C_0$.

De fato, supondo por absurdo que $A_0 \ne B_0$ no máximo, podemos tomar $C_1 = C_0$, $A_1 = B_1 = \dfrac{A_0 + B_0}{2}$ e teremos

$A_1 + B_1 + C_1 = A_0 + B_0 + C_0 = 180^{\circ}$ e:

$$\text{sen}A_1 + \text{sen}B_1 + \text{sen}C_1 = 2\text{sen}\frac{A_0+B_0}{2} + \text{sen}C_0 > 2\text{sen}\,\frac{A_0+B_0}{2}\cos\frac{A_0-B_0}{2} + \text{sen}C_0 = \text{sen}A_0 + \text{sen}B_0 + \text{sen}C_0$$

contradição, pois havíamos assumido que (A_0, B_0, C_0) era a tripla do máximo.

2ª solução para a desigualdade I:

Nesta solução, usaremos o conceito de somatório simétrico.

Sendo f(x, y, z) uma função de três variáveis,

$$\sum_{sym} f(x, y, z) = f(x, y, z) + f(x, z, y) + f(y, x, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) + f(z, y, x).$$

Por exemplo: $\sum_{sym} x^2y = x^2y + xy^2 + y^2z + y^2z + z^2x + zx^2$, $\sum_{sym} xyz = 6xyz$.

A desigualdade é equivalente a $\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{abc}{4p}$, onde p é o semiperímetro $\left(\text{usamos Heron, } S = pr \text{ e } S = \frac{abc}{4R}\right)$.

Faremos agora as substituições de Ravi para lados de triângulo: $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$.

Logo, $p = x + y + z$, $p - a = z$, $p - b = y$ e $p - c = x$ ($x, y, z > 0$).

Assim, devemos provar que $\frac{\sqrt[2]{3}}{9}\sqrt{xyz(x+y+z)} \leq \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4(x+y+z)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\ (x + y)^2\ (x + z)^2\ (y + z)^2 \geq 64\ xyz\ (x + y + z)^3$.

Em notação de somatório simétrico, temos:

$$27\sum_{sym} x^4y^2 + 27\sum_{sym} x^3y^3 \geq 30\sum_{sym} x^3y^2z + 19\sum_{sym} x^2y^2z^2 + 5\sum_{sym} x^4yz.$$

Dizemos que a sequência (a, b, c) majora a sequência (d, e, f) se $(a \geq d, a + b \geq d + e)$ e $(a + b + c = d + e + f)$.

Nesse caso, há a conhecida desigualdade de Muirhead (mais conhecida como **Bunching**): $\sum_{sym} x^a y^b z^c \geq \sum_{sym} x^d y^e z^f$.

Assim, temos:

$$5\sum_{sym} x^4y^2 \geq 5\sum_{sym} x^4yz \qquad ((4, 2, 0) \text{ majora } (4, 1, 1))$$
$$22\sum_{sym} x^4y^2 \geq 22\sum_{sym} x^3y^2z \qquad ((4, 2, 0) \text{ majora } (3, 2, 1))$$
$$8\sum_{sym} x^3y^3 \geq 8\sum_{sym} x^3y^2z \qquad ((3, 3, 0) \text{ majora } (3, 2, 1))$$
$$19\sum_{sym} x^3y^3 \geq 19\sum_{sym} x^2y^2z^2 \qquad ((3, 3, 0) \text{ majora } (2, 2, 2))$$

Somando todas, segue a desigualdade.

2ª solução para a desigualdade II:

Para provar que $(a + b + c)^3 \geq 27$ abc, podemos ver que isto é equivalente a $\frac{1}{2}\sum_{sym} a^3 + 3\sum_{sym} a^2b \geq \frac{7}{2}\sum_{sym} abc$, o que é verdade por Bunching.

Observação:
Uma boa referência para o estudo da desigualdade de Muirhead (Bunching) é o artigo "Contas com desigualdades" de Marcio Cohen e Rodrigo Villard na revista *Eureka*! edição 23 (procure em www.obm.org.br)

Comentário:

A prova de Matemática do IME deste ano apresentou um nível de dificuldade menor que dos anos anteriores. No entanto, ainda assim, a banca manteve a tradição gerando uma prova com conceitos acima do ensino médio.

As questões mais fáceis da prova foram 1, 2 e 6, enquanto as mais difíceis foram 9 e 10. A prova foi bastante abrangente, cobrindo os diversos assuntos do conteúdo programático.

Professores:

Rodrigo Villard, Márcio Cohen, Jordan Piva, Fábio Moreira, Matheus Secco, Sandro Davison, Moyses Cohen, Daniel Fadel e Rômulo Duarte.