Questão 1

Qual é o menor número?

(A) $\pi \cdot 8!$.
(B) 9^9.
(C) $2^{2^{2^2}}$.
(D) 3^{3^3}.
(E) $2^{13} \cdot 5^3$.

Gabarito: Letra C.

O menor número é $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$. De fato:

- $\pi \cdot 8! > 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^8 \cdot 315 > 2^8 \cdot 2^8 = 2^{16}$
- $9^9 = (3^2)^9 = 3^{18} > 2^{18} > 2^{16}$
- $3^{3^3} = 3^{27} > 9^9 > 2^{16}$
- $2^{13} \cdot 5^3 = 2^{13} \cdot 125 > 2^{13} \cdot 2^3 = 2^{16}$

Questão 2

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que a, b e c são números reais positivos satisfazendo $abc = 1$. Sabe-se que $A^T A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3ª ordem. O produto dos possíveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

(A) 2.
(B) 4.
(C) 6.
(D) 8.
(E) 10.

Gabarito: ANULADA.

$AA^t = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow ab + bc + ca = 0$ (basta olhar o elemento da linha 1 e coluna 2)

Como a, b, c são positivos, isto é uma contradição e a questão deveria ser anulada.

<u>Comentário</u>: Caso o enunciado não considerasse a, b e c reais, a solução seria como a seguir:

$AA^t = I \Rightarrow \det A = \pm 1$

Como $\det A = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3 - a^3 - b^3 - c^3$, $a^3 + b^3 + c^3$ poderia ser 4 ou 2 e o produto seria 8.

Questão 3

Sejam $W = \{y \in \Re \mid 2k + 1 \le y \le 3k - 5\}$ e $S = \{y \in \Re \mid 3 \le y \le 22\}$. Qual é o conjunto dos valores de $k \in \Re$ para o qual $W \neq \varnothing$ e $W \subseteq (W \cap S)$?

(A) $\{1 \le k \le 9\}$
(B) $\{k \le 9\}$
(C) $\{6 \le k \le 9\}$
(D) $\{k \le 6\}$
(E) $\varnothing$

Gabarito: Letra C.

$W = \{y \in \Re \mid 2k + 1 \le y \le 3k - 5\}$
$S = \{y \in \Re \mid 3 \le y \le 22\}$

Dado que $W \neq \varnothing$, $2k + 1 \le 3k - 5 \Leftrightarrow k \ge 6$.
Se $W \subseteq (W \cap S)$, então todo elemento de W está em S, e portanto $W \subseteq S$. Logo:

$$\begin{cases} 2k+1 \ge 3 \\ 3k-5 \le 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 1 \\ k \le 9 \end{cases}$$

Fazendo a interseção das soluções, temos $6 \le k \le 9$.

Questão 4

Sabe se $y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = x \cdot y^3 \cdot z^2 = \dfrac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e$, em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor de $x + y + z$ é:

(A) $e^3 + e^2 + 1$
(B) $e^2 + e^{-1} + e$
(C) $e^3 + 1$
(D) $e^3 + e^{-2} + e$
(E) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

Gabarito: Letra B.

$$\begin{cases} yz\sqrt{z\sqrt{x}} = e & \text{(I)} \\ xy^3z^2 = e & \text{(II)} \\ \dfrac{x}{z\sqrt{yz}} = e & \text{(III)} \end{cases}$$

Considerando x, y e $z \in \mathbb{R}$ e igualando II e III: $xy^3z^3\sqrt{yz} = x$

$x \neq 0$; pois $x = 0 \Rightarrow 0 = e$ pela equação III. Então, $y^7z^7 = 1 \Rightarrow yz = 1$.

Substituindo em:

I. $\sqrt{z\sqrt{x}} = e \Rightarrow z^2x = e^4$
III. $x = ez$

$z^3 = e^3 \Rightarrow \boxed{z = e}$

$yz = 1 \Rightarrow \boxed{y = e^{-1}}$

$x = ez \Rightarrow \boxed{x = e^2}$

Então, $x + y + z = e^2 + e^{-1} + e$

Obs.: Poderíamos aplicar ln e tornar o sistema linear.

Questão 5

Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semi-distância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero $ABCD$ é:

(A) 8

(B) 16

(C) $\frac{16}{3}$

(D) $\frac{16}{5}$

(E) $\frac{16}{7}$

Gabarito: Letra D.

A elipse dada tem equação da forma

$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, c = \sqrt{3}$ e $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (não há problemas em supor que a elipse é horizontal, pois as retas consideradas são $y = \pm x$)

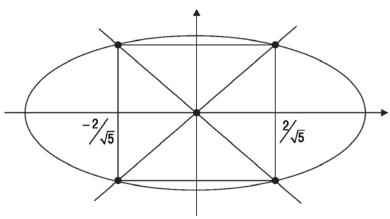
Como $e = \frac{c}{a}$, então $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{a} \Leftrightarrow a = 2$.

Pela relação fundamental da elipse, $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b = 1$.

Então: $\varepsilon : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Como as retas $y = x$ e $y = -x$ são perpendiculares e a elipse é simétrica em relação à origem e aos eixos, as interseções das retas com a elipse formam um quadrado. Logo: $y = \pm x \Rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

O lado do quadrado é $\frac{4}{\sqrt{5}}$; logo, a área é $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}$.

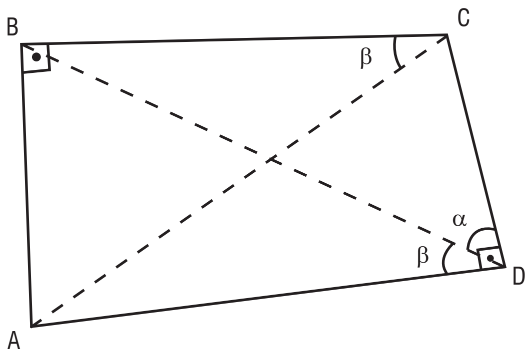


Questão 6

Em um quadrilátero $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}A$ são retos. Considere que sen $\left(B\hat{D}C\right)$ e sen $\left(B\hat{C}A\right)$ sejam as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, onde $b, c \in \Re$. Qual a verdadeira relação satisfeita por b e c?

(A) $b^2 + 2c^2 = 1$.
(B) $b^4 + 2c^2 = b^2c$.
(C) $b^2 + 2c = 1$.
(D) $b^2 - 2c^2 = 1$.
(E) $b^2 - 2c = 1$.

Gabarito: Letra E.



$B\hat{D}A = \beta$

$\hat{C}DB = \alpha$

Como $A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180°$, o quadrilátero é inscritível. Logo, $B\hat{C}A = B\hat{D}A$ e os ângulos citados $B\hat{D}C$ e $B\hat{C}A$ são complementares.

As raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ são x_1 e x_2.
Temos que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{1}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{1}$, $x_1 = \text{sen}\,\alpha$ e $x_2 = \text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

$$\begin{cases} x_1 = \text{sen}\,\alpha \\ x_2 = \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1.$$

Como $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, substituindo $(-b)^2 = 1 + 2c \Rightarrow b^2 - 2c = 1$

Questão 7

Sejam uma circunferência *C* com centro *O* e raio *R*, e uma reta *r* tangente a *C* no ponto *T*. Traça-se o diâmetro *AB* oblíquo a *r*. A projeção de *AB* sobre *r* é o segmento *PQ*. Sabendo que a razão entre *OQ* e o raio *R* é $\frac{\sqrt{7}}{2}$, o ângulo, em radianos, entre *AB* e *PQ* é:

(A) $\frac{\pi}{4}$.

(B) $\frac{\pi}{6}$.

(C) $\frac{5\pi}{18}$.

(D) $\frac{\pi}{3}$.

(E) $\frac{7\pi}{18}$.

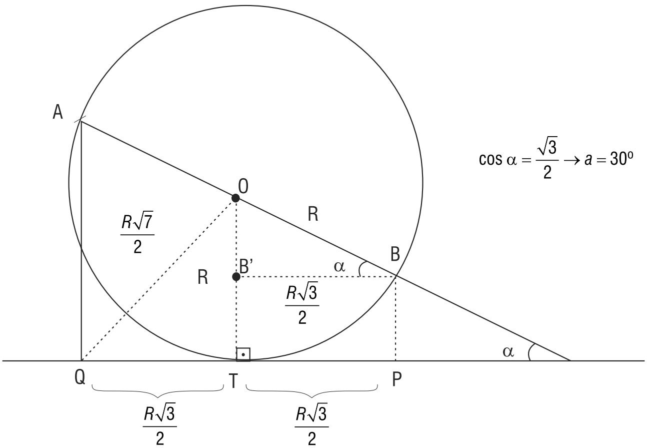
Gabarito: Letra B.

Já que $\frac{OQ}{OT} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, têm-se $OQ = \frac{R\sqrt{7}}{2}$. Seja B' = $\text{proj}_{\overline{OT}} B$. O ângulo entre AB e PQ é congruente ao ângulo $O\hat{B}B'$. No $\triangle$OBB', tem-se

OB = R

$BB' = PT = QT = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (pitágoras $\triangle$OQT)

Logo $\cos\left(O\hat{B}B'\right) = \frac{BB'}{OB} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e então $O\hat{B}B' = 30^o = \frac{\pi}{6}$.



Questão 8

Seja *SABCD* uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo *ABCD*. A aresta *SD* é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

(A) $\sqrt{5}$.
(B) $\sqrt{7}$.
(C) $\sqrt{11}$.
(D) $\sqrt{13}$.
(E) $\sqrt{17}$.

Gabarito: Letra B.

Como, no plano (*ABCD*), $AB = BC$ e $AD = DC$, temos que *BD* é mediatriz de *AC*. Seja *M* a interseção de BD e AC. *M* é o ponto médio de *AC*, ou seja, $AM = MC = 1$.

Agora, tem-se, por Pitágoras:

$$\text{no } \Delta\, MAD: \begin{cases} MA = 1 \\ AD = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow MD = 1$$

$$\text{no } \Delta\, MAB: \begin{cases} MA = 1 \\ AB = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow MB = 2$$

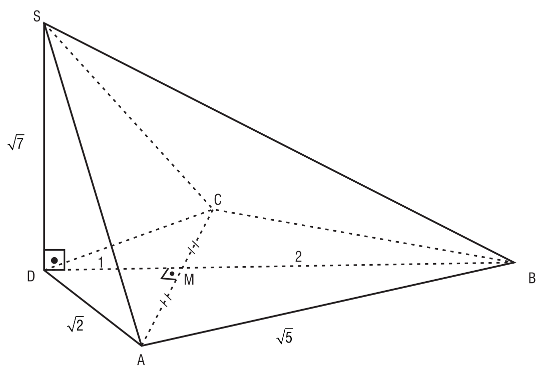
Logo BD $= 3$.

Agora, no $\Delta ASD: SA = \sqrt{SD^2 + 2}$,

no $\Delta \mathrm{BSD}: \mathrm{SB} = \sqrt{SD^2 + 9}$

Mas $SA + SB = 7$, logo $SD = \sqrt{7}$. (Já que $SA + SB$ é função crescente na variável *SD*.)

Logo, o volume de $S - ABCD$ é $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{AC \cdot BD}{2}\right) \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}$.



Questão 9

Seja f: $\Re \to \Re$ uma função real definida por $f(x) = x^2 - \pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que: $a = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$; $b = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$; $c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $d = \text{cotg}^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$. A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ e $f(d)$ é:

(A) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$
(B) $f(d) > f(a) > f(c) > f(\text{b})$
(C) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$
(D) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$
(E) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

Gabarito: Letra D.

Primeiramente, veja que $a, b \in 1^{\text{o}}\text{Q}$ e $c, d \in 2^{\text{o}}\text{Q}$.

Além disso, temos $c = \frac{\pi}{2} + a$ e $d = \frac{\pi}{2} + b$.

Veja, agora, que $f(x) = f(\pi - x)$, pois a parábola tem eixo de simetria em $x = \frac{\pi}{2}$.

Daí, podemos levar os ângulos de 2ºQ para o 1ºQ:

$f(c) = \text{f}(\frac{\pi}{2} + a) = f(\frac{\pi}{2} - a)$ e $f(d) = f(\frac{\pi}{2} + b) = f(\frac{\pi}{2} - b)$.

Portanto, precisamos comparar $f(a), f(b), f(\frac{\pi}{2} - a), f(\frac{\pi}{2} - b)$

Como f é decrescente no 1ºQ, basta comparar

$a, b, \frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - b$ e inverter.

$\text{sen}\, a = \frac{1}{3} \to \tan a = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{1}{\tan b} = \frac{4}{5}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a} = 2\sqrt{2}$

Veja que $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{4} < 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan a < \tan(\frac{\pi}{2} - b) < \tan b < \tan(\frac{\pi}{2} - a)$.

Como tan é crescente no 1ºQ:

$a < \frac{\pi}{2} - b < b < \frac{\pi}{2} - a$

$\Rightarrow f(a) > f(\frac{\pi}{2} - b) > f(b) > f(\frac{\pi}{2} - a)$

$\Rightarrow f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$

Questão 10

Sabe-se que o valor do sexto termo da expansão em binômio de Newton de $\left(2^{\log_2 \sqrt{9^{(x-1)}+7}} + \dfrac{1}{2^{\frac{1}{5}\log_2(3^{(x-1)}+1)}}\right)^7$ é 84. O valor da soma dos possíveis valores de *x* é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

Gabarito: Letra C.

O 6º termo, considerando expansão em potências decrescentes, é $\binom{7}{5} \cdot \left[2^{\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}}\right]^2 \cdot \left[\dfrac{1}{2^{\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)}}\right]^5 = 21 \cdot \dfrac{(9^{x-1}+7)}{3^{x-1}+1}$.

Logo, $\dfrac{(9^{x-1}+7)}{3^{x-1}+1} = 4$. Fazendo $3^{x-1} = t$, segue que $t^2 - 4t + 3 = 0$ e então $t = 1$ ou $t = 3$.

Assim, $3^{x-1} = 1$ ou $3^{x-1} = 3 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$.

A soma dos possíveis valores é $1 + 2 = 3$.

Questão 11

Para o número complexo *z* que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade $|z - 26i| \leq 10$, sejam α_1 e α_2 os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 - \alpha_2|$ é:

(A) $\pi - \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$
(B) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right)$
(C) $\tan^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right)$
(D) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$
(E) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right)$

Gabarito: Letra D.

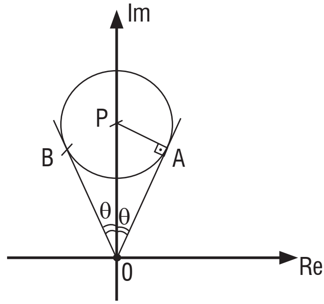
Lembrando que $|z - w|$ é a distância entre os afixos de *z* e *w* no plano Argand-Gauss, o conjunto $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 26i| \leq 10\}$ é um círculo de centro em $26i$ e raio 10.
Considere $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ tangentes a circunferência. Os argumentos mínimo e máximo são obtidos, respectivamente, em A e B.

Por isso $|\alpha_1 - \alpha_2| = A\hat{O}B = 2\theta$ (figura).
Veja que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{10}{26} = \dfrac{5}{13}$, logo $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ e $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$.

Então, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{5}{12}$ e $A\hat{O}B = 2\theta$

$\downarrow$

$A\hat{O}B = 2 \cdot \tan^{-1}\dfrac{5}{12}$.



Questão 12

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(C) $\sqrt{6}$

(D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(E) 1

Gabarito: Letra B.

Sejam $a - r$, a, $a + r$ os três termos da PA.

($r > 0$).

Temos: $\begin{cases} 3a = S_1 & (1) \\ 3a^2 + 2r^2 = S_2 & (2) \end{cases}$

Como a e $a + r$ são as raízes de $x^2 - S_1x + (S_2 - \frac{1}{2}) = 0$,

Temos: $\begin{cases} 2a + r = S_1 & (3) \\ a^2 + ar = S_2 - \frac{1}{2} & (4) \end{cases}$

Usando (1) e (3), segue que $\boxed{a = r}$.

Em (2), $S_2 = 5r^2$, e finalmente em (4), obtemos que $r^2 + r^2 = 5r^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{6}$, pois $r > 0$.

Questão 13

Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \ldots)\ln 2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x + \text{sen}\, x}$ é:

(A) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

(B) $\sqrt{3} - 1$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

(E) $\sqrt{3} + 1$.

Obs.: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

Gabarito: Letra A.

$y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow (y - 1)\,(y - 8) = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 8$

Como $e^{lnt} = t$, a expressão é:

$$E = \left(e^{ln 2}\right)^{\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \ldots} = 2^{\frac{\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}} = 2^{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = 2^{\text{tg}^2 x}$$

se $2^{\text{tg}^2 x} = 2^0$ temos $\text{tg}x = 0$ e $x \notin (0, \pi/2)$

se $2^{\text{tg}^2 x} = 2^3$ temos $\text{tg}x = \pm\sqrt{3}$ e $x \in (0, \pi/2)$ implica $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

Logo, $$\frac{\cos x}{\cos x + \text{sen}\, x} = \frac{\cancel{\cos x}\big/\cos x}{\cos x\big/\cancel{\cos x} + \text{sen}\, x\big/\cancel{\cos x}} = \frac{1}{1 + \text{tg}\, x} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Questão 14

Sejam $f(x) = \text{sen}(logx)$ e $g(x) = \cos(logx)$ duas funções reais, nas quais $logx$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x)\cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x\cdot y)\right]$ é:

(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

Gabarito: Letra E.

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \cos\left(\log\frac{x}{y}\right) = \cos(\log x - \log y)$$
$$g(xy) = \cos\left(\log(xy)\right) = \cos(\log x + \log y)$$

Logo, $g\left(\frac{x}{y}\right) - g\,(xy) = -2\,\text{sen}(-\log y)\,\text{sen}(\log x) = 2\cdot\text{sen}(\log y)\,\text{sen}(\log x)$.

Daí, $f(x)\cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(xy)\right] = \text{sen}(\log x)\,\text{sen}(\log y) - \text{sen}(\log x)\,\text{sen}(\log y) = 0$.

Questão 15

Em uma festa de aniversário estão presentes n famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá 2 pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de n deverá ser:

(A) 17
(B) 18
(C) 19
(D) 20
(E) 21

Gabarito: Letra A

Equipe que tem apenas o pai: $n + 2$ possibilidades;

Outra equipe:

1º caso: 2 pessoas das famílias com 2 filhos:

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{escolha das pessoas}} \cdot \underbrace{n}_{\text{escolha da família}} = 3n$$

2º caso: 2 pessoas das famílias com 1 filhos:

$$\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{escolha das pessoas}} \cdot \underbrace{2}_{\text{escolha da família}} = 2$$

Total: $3n + 2$

Como as equipes tem cores: 2 possibilidades;
Logo: $2 \cdot (n + 2)(3n + 2) = 2014 \Rightarrow n = 17$ (pois $n \in \mathbb{N}$).