QUESTÕES DE MATEMÁTICA

Questão 01

Há dois anos Letícia tinha $\frac{1}{6}$ da idade que seu pai tem hoje. Daqui a um ano Letícia terá $\frac{1}{4}$ da idade atual de sua mãe. Hoje a soma das idades dos três é igual ao menor número natural de três algarismos distintos divisível por 3. Os irmãos gêmeos de Letícia têm hoje a metade da idade que Letícia terá daqui a oito anos. Atualmente, a soma das idades dos três irmãos é:

a) 24
b) 36
c) 28
d) 30

Resolução

$x - 2 = \frac{1}{6}.Y$

Idades atuais: Letícia x anos
Pai y anos
Mãe z anos

$x - 2 = \frac{1}{6}.y \rightarrow y = 6x - 12$

$x + 1 = \frac{1}{4}.Z \rightarrow Z = 4x + 4$

$x + y + z = 102 \rightarrow x + 6x - 12 + 4x + 4 = 102 \rightarrow 11x = 110 \rightarrow x = 10$ anos

Irmãos Gêmeos: W anos cada

$W = \frac{1}{2}(x+8)\ W = \frac{1}{2}.18 \rightarrow W = 9$ anos

Somada a idade dos irmãos: $10+9+9 = 28$ anos

Alternativa C

Questão 02

Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{ba^2} + ba\sqrt{a} - b\sqrt{ba} + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a:

a) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Resolução

Analisando PeQ, separadamente:

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\ \sqrt{a} - \sqrt{b}\ a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}\ a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + ba(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b^2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

$$P = \frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a^2+ba+b^2)} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4-b^4}{a^2(a+b)+b^2(a+b)} = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

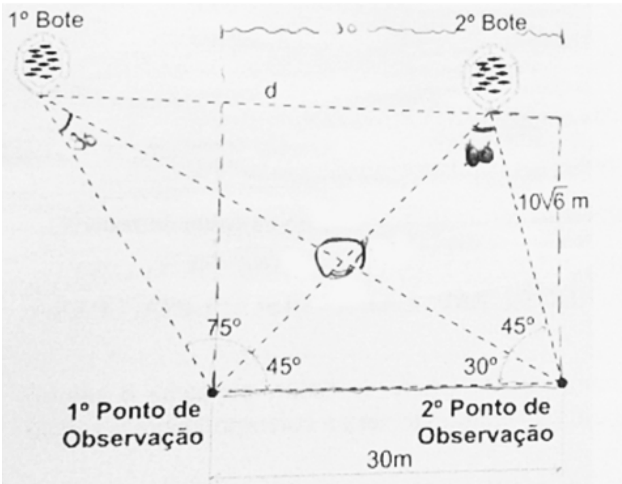
$$Q = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)} = a-b$$

Finalmente, $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{a-b}{\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

Alternativa D

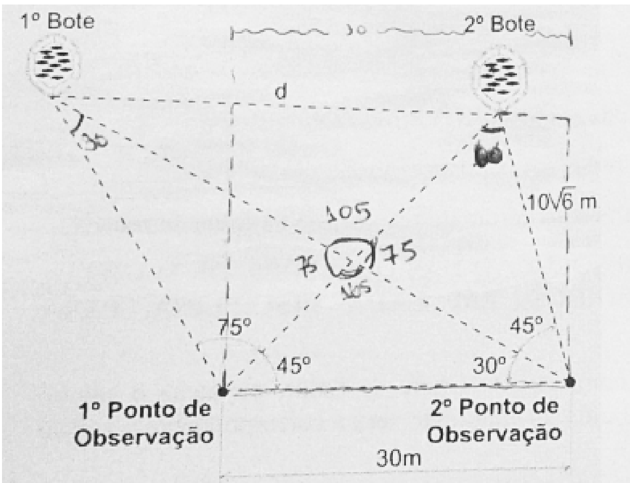
Questão 03

Dois botes estão no mar a uma distância d um do outro. Um observador, situado na praia, observava-os. Calculando distâncias e ângulos em dois pontos de observação, como no esboço abaixo. A distância d entre os botes, em metros, é igual a Dado: sen 120º = cos 30º.



a) $10\sqrt{15}$
b) $15(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
c) $10(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
d) $15(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Resolução



$AB^2 = 30^2 + 30^2 - 2.30\ .\ 30\ .\ \cos 120^o$

$AB^2 = 900 + 900 - \cancel{2}. + 900.\left(-\dfrac{1}{\cancel{2}}\right)$

$AB^2 = 900 + 900 + 900$

$AB^2 = 2700 \rightarrow AB = 30\sqrt{3}$

$d^2 = AB^2 + (10\sqrt{6})^2 .\ AB\ .\ 10\sqrt{6}\ .\ \cos 45^o$

$d^2 = 2700 + 600 - \cancel{2}.3\sqrt{3}.10\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$d^2 = 3300 - 1800$

$d^2 = 1500$

$d = 10\sqrt{15}m$

Alternativa A

Questão 04

Leila foi avisada em dezembro de 2012, que a mensalidade escolar de seus filhos para o ano de 2013 teria um aumento de 80%. Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON que, após analisar o caso, determinou que a escola reduzisse este último valor em 30%. A escola acatou a decisão do PROCON. Além disso, como Leila tem 3 filhos matriculados, a escola decidiu lhe dar 10% de desconto nas mensalidades de cada um de seus filhos. Dessa forma, o aumento da mensalidade escolar dos filhos da Leila do ano de 2012 para o ano de 2013 passou a ser, em percentual, um número compreendido entre:

a) 10 e 13
b) 13 e 16
c) 16 e 19
d) 19 e 22

Resolução

Mensalidade Inicial → Mensalidade em 2013

$X \xrightarrow[+80\%]{} 1{,}8\,x \xrightarrow[-30\%]{} 1{,}26\,x \xrightarrow[-10\%]{} 1{,}134\,x$

De x para 1,34x, ocorre um acréscimo de 13,4%.

Alternativa B

Questão 05

Uma confecção de roupas foi contratada para confeccionar os agasalhos de todos os alunos do 1º ano CPCAR para o ano de 2014. O prazo que a confecção teve para a execução do trabalho foi de 4 dias. Para isso, o gerente da confecção utilizou 6 maquinas tipo •, cada uma trabalhando 6 horas por dia e todas com a mesma produtividade. Ao final do terceiro dia, o gerente da fábrica verificou que somente $0{,}\overline{3}$ de $\dfrac{9}{4}$ - dos agasalhos estavam prontos.

Sendo assim, substituiu, no inicio do quarto dia, as máquinas do tipo u por 3 outras do tipo p, cada uma trabalhando 8 horas por dia, e cada uma delas com o triplo da produtividade de uma maquina tipo u . Se as 3 máquinas tipo p tivessem sido utilizadas desde o início, o serviço teria sido realizado em

a) 20 horas.
b) 16 horas.
c) 12 horas.
d) 10 horas.

Resolução

Máquinas α	Hora / Dia	Dias	Ação
6	6	4	X
6	6	3	$\frac{1}{3}.\frac{9}{4}x = \frac{3}{4}x$

Máquinas α ↑	Hora / Dia ↑	Dias ↓	Ação ↓
6	6	3	$\frac{3}{4}X$
$\cancel{6}$ 9	8	y	1x

9	8	3	$\frac{3}{4}$
6	6	y	1

$$Y = \frac{6.6.\cancel{3}.1}{9.\cancel{8}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}} = \frac{36}{18} = 2$$

2 dias de trabalho $\Rightarrow$ 16 horas

Alternativa B

Questão 06

Três pessoas, X, Y e Z tinham a mesma quantia em reais. X, de inicio, gastou 99 reais. Y deu uma parte de sua quantia para Z, e o dobro dessa parte, para X. Com essas novas quantias em reais, as três pessoas saíram para as compras e X gastou o quadrado da diferença entre 4 reais e o que Y havia dado para Z. Y e Z gastaram, cada uma, a diferença entre o quadrado do que Y havia dado a Z e 4 reais. Após esses gastos, a soma das quantias de X e Z era igual ao dobro da de Y. E correto afirmar que X gastou no total, em reais:

a) 90
b) 99
c) 108
d) 118

Resolução

Temos que a quantia de X, Y e Z é a mesma. Portanto, vamos considerar que a quantia de cada pessoa é W e o valor que Y dá para Z é igual a V. Sendo assim, temos:

Quantia final de X		Quantia final de Z		Quantia final de Y
$[(w - 99 + 2v) - (4 - v)^2]$	+	$[(w+v) - (v^2 - 4)]$	=	$2[(w-3v) - (v^2 - 4)$

Resolvendo, temos: $17v = 119$

$$V = \frac{119}{17} = 7$$

Portanto, podemos afirmar que o valor gasto por X é:
$99 + (4 - v)^2$
Como $v = 7$

Temos $99 + (4 - 7)^2 = 99 + (-3)^2 = 99 + 9 = 108$

Alternativa C

Questão 07

O número de alunos do CPCAR que se inscreveu para um desafio de matemática na EPCAR, realizado anualmente, foi, nos anos de 2009, 2010 e 2012, respectivamente igual a 5, 6 e 20. Os professores da EPCAR perceberam que o número de alunos que se inscreveu para esse desafio cresceu, de maneira que a diferença entre o número de alunos dos anos (x + 2) e x é diretamente proporcional ao número de alunos do ano (x + 1). Se y é o número de alunos do CPCAR que se inscreveu nesse desafio em 2011, então a soma dos divisores naturais de y é:

a) 28
b) 26
c) 24
d) 20

Resolução
Podemos escrever:

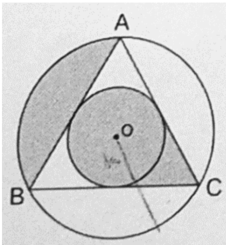
5	6	y	20	
2009	2010	2011	2012	ANOS
X	X+1	X+2	X+3	
	X	X+1	X+2	

Usando o enunciado, podemos escrever $\frac{20-6}{y}=\frac{y-5}{6} \therefore 6.14 = y^2 - 5y \therefore y^2 - 5y - 84 = 0$

y' = 12
y" = -7
logo y = 12
Seus divisores são: {1,2,3,4,6,12}
A soma será 28

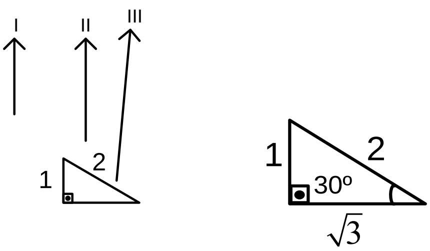
Alternativa A

Questão 08
Considere o triângulo ABC, inscrito na circunferência de centro O abaixo, em que os menores arcos AS, BC e AC são congruentes. A Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo ABC, tem raio igual a 1 cm, então o número que representa a área sombreada, em cm², é igual ao número que representa:



a) o comprimento do circulo menor, em cm.
b) a área do circulo maior, em cm².
c) o comprimento do círculo maior, em cm.
d) o dobro da área do triângulo ABC, em cm².

Resolução



Como o raio da menor circunferência mede 1 cm, o raio da maior medirá o dobro, por conta do triângulo ABC ser equilátero.

Assim, sen 30º = $\frac{1}{R}$: R = 2

A área destacada pode ser dividida em três partes:

$$(\text{I}) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(\text{I})\ 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(\text{I}) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$(\text{II}) = \pi\, r^2$$

$$(\text{II}) = \pi$$

$$(\text{III})\ \left[\frac{(2\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} - \pi(1)^2\right].\frac{1}{3}$$

$$(\text{III}) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$$

$$(\text{III}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

A área destacada é dada por (I) + (II) + (III):

Assim, $\frac{4\pi}{3} - \cancel{\sqrt{3}} + \pi + \cancel{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$

$$\text{Acl} = \frac{4\pi + 3\pi - \pi}{3} = 2\pi\text{cm}^2$$

Alternativa A

Questão 09

Considere os números p, q e r abaixo:

$$p = \frac{\sqrt{180} + 2\sqrt{20} - 1\sqrt{605}}{4\sqrt{80} - \sqrt{500}}$$

$$q = \left[\left(9^{0,\bar{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3}$$

$$r = 0,\overline{18}\ .\ \left(\frac{\sqrt{0,25} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 225^{0,5}}\right)$$

Se x é o número obtido pelo produto entre p, q e r, então x é um número

a) irracional positivo.
b) irracional negativo.
c) racional negativo.
d) racional positivo.

Resolução

$$q=\left[\left(9^{0,\overline{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3}=\left[\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}=\left[\left(9^{\frac{1}{\cancel{3}}}\right)\right]^{-\cancel{3}}=9^{-1}=\frac{1}{9}$$

$$P=\frac{\sqrt{180}+2\sqrt{20}-2\sqrt{605}}{4\sqrt{80}-\sqrt{500}}$$

$$P=\frac{2.3.\sqrt{5}+2.2.\sqrt{5}-2.11\sqrt{5}}{4.4\sqrt{5}-10.\sqrt{5}}$$

$$P=\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-22\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}$$

$$P=\frac{-12\sqrt{\cancel{5}}}{6\sqrt{\cancel{5}}}=-2$$

$$R=0,\overline{18}.\left(\frac{\frac{5}{10}.16}{9-15}\right)\rightarrow R=\frac{18}{99}.\left(\frac{\frac{165}{10}}{-6}\right)$$

$$R=\frac{1\cancel{8}^{\cancel{3}}}{9\cancel{9}_{3\cancel{3}_{1}}}.\left(-\frac{1\cancel{65}^{\cancel{5}^{1}}}{\cancel{60}_{\cancel{10}_{2}}}\right)$$

$$R=\frac{-1}{2}$$

$$x=-\cancel{2}.\frac{1}{9}-\frac{-1}{\cancel{2}}=\frac{1}{9}$$

Alternativa D

Questão 10

Um ônibus percorre, na estrada, 9 km com 1 litro de combustível. O motorista desse ônibus realizou uma viagem de 551 km. Ao sair do local de origem da viagem, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicava $\frac{6}{8}$ do tanque. Após o motorista percorrer 225 km, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicou $\frac{1}{2}$ tanque. Com base nessa situação, é correto afirmar que, ao chegar no destino proposto, a quantidade de combustível restante no tanque do ônibus estava entre

a) 11 e 12 litros.
b) 12 e 13 litros.
c) 13 e 14 litros.
d) 14e 15 litros.

Resolução

9km por litro

551 km $\Rightarrow 9x=551 \Rightarrow x=\frac{551}{9}$ litros/viagem

Tanque $\frac{6}{8}=\frac{1}{2}$ tanque 75 litros

225km $\Rightarrow \frac{1}{4}$ ao tanque $\Rightarrow \frac{225}{9}=25$litros

Após 225km $\Rightarrow \frac{1}{2}$ tanque

75 litros – 61,2 litros $\cong$ 13,8 litros

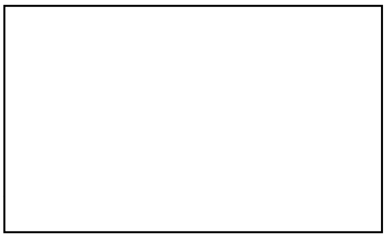
Alternativa C

Questão 11

Uma escola tem 10 salas de aula . Em todas elas cada uma das quatro paredes mede 500 cm de comprimento e 0,3 dam de altura. Deseja-se pintar as paredes dessas salas com tinta branca e para isso foram comprados galões de 36dℓ por R$ 54,00 cada um. O pintor calculou que, para pintar cada 12 m^2 de parede, gastará 3ℓ dessa tinta e um tempo de 24 minutos. Sabe-se que ele cobra R$ 20,00 por hora trabalhada. Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) serão necessários mais de 41 galões de 3,6ℓ para essa pintura.
b) para pintar todas as paredes serão gastos menos de R$ 2 000,00 com tinta.
c) serão necessárias apenas 18 horas de trabalho para pintar as 10 salas de aula.
d) o pintor receberá, em reais, ao final da pintura, o valor equivalente ao de 8 galões de tinta.

Resolução



3 cm

500 cm
5 m

Área total a ser pintada: $15\,m^2 .10.4 = 600\,m^2$
Utilizando o conceito de proporção, obtemos o seguinte resultado:

3,6 ℓ ———————— 54,00
0,6 ℓ ———————— 9,00
Portanto 3 ℓ——— 45,00
20,00 ——— por hora
20,00 ——— 60 min
4,00 ——— 12 min
8,00 ——— 24 min

Temos que: 3 ℓ——— 45,00 em tinta
24 min de trabalho ——— 8,00 valor do trabalho do pintor

	Litros	m^2	Tempo	Valor Trab	Valor Tinta
x 50	3 ℓ	$12\,m^2$	24min	8,00	45,00
	150 ℓ	$600\,m^2$	1200 min / 20horas	400,00	2250,00

A – V
B – F
C – F
D – F

$8.54 = 432{,}00$

Alternativa A

Questão 12

Fernando, um aluno aplicado em matemática, propôs a seus colegas o desafio de descobrirem os coeficientes e as raízes de três equações do 2° grau, todas na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Ele afirmou que:

- Os coeficientes dos termos de maiores graus da 2ª e da 3ª equações são iguais ao menor número inteiro positivo.
- O conjunto solução da 1a equação é {-1,- 2} e a 2ª equação possui duas raízes reais e iguais a 3;
- O coeficiente do termo de maior grau da 1 a equação é igual ao oposto do coeficiente de maior grau da 3ª equação;
- O coeficiente de x da 3ª equação é a metade do coeficiente de x da 2ª equação.
- O produto das raízes da 3ª equação é igual a unidade.

Com base nesses dados, marque a alternativa FALSA.

a) A soma dos coeficientes da 1 a equação é um número que pode ser escrito como 2k , tal que $k \in \mathbb{Z}$
b) A soma das raízes das três equações é igual ao oposto do coeficiente de x da 2ª equação.
c) A razão entre o termo independente de x da 3ª equação e o termo independente de x da 1ª equação é um número do conjunto Q.
d) A diferença entre as raízes da 3ª equação é um número racional.

Resolução

Todas são da fórmula: $ax^2+bx+c=0$

1 - Equação
a= -1
x' = -1
x''= -2

Usando a forma fatora temos: $-1(x+1).(x+2)=0 \therefore -x^2-3x-2=0$

2- Equação
Q = 1
x' = x''=3
b=m
Temos:
$-\frac{b}{a}=6 \therefore -\frac{b}{1}=6 \therefore b=-6$
$\frac{c}{a}=9 \therefore \frac{c}{1}=9 \therefore c=9$

3 - Equação
a= 1
x'.x'' = 1
$b=\frac{m}{2}=-3$
Temos:
$\frac{c}{a}=1 \therefore c=1$
$x^2-3x+1=0$
$x'=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x''=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Analisando as alternativas, temos a alternativa D como falsa, pois:
$$\left|\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right|=\left|\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}$$
Que é um número irracional.

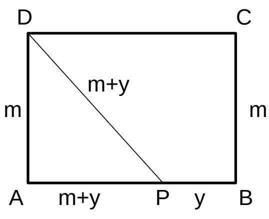
Alternativa D

Questão 13

Considere um quadrado ABCD de lado **m**. Seja P o ponto do lado AB tal que $\overline{DP}=\overline{CB}+\overline{BP}$. A área do trapézio DCBP é x % da área do quadrado ABCD. O número **x** está compreendido entre

a) 60 e 62
b) 62e64
c) 64 e 66
d) 66e68

Resolução

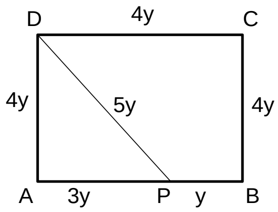


Δ ADP:

$(m+y)^2 = m^2 + (m - y)^2$

$\cancel{m^2} + 2my + \cancel{y^2} = \cancel{m^2} + m^2 - 2my + \cancel{y^2}$

$4my = m^2 \rightarrow m = 4y, \text{pois } m \neq 0$



$$A_{BCDP} = \frac{(4y+y).4y}{2} = 10y^2$$

$A_{BCDP} = x\ \%\ \text{de}\ A_{ABCD}$

$10\cancel{y^2} = x\ \%\ \text{de}\ 16\cancel{y^2}$

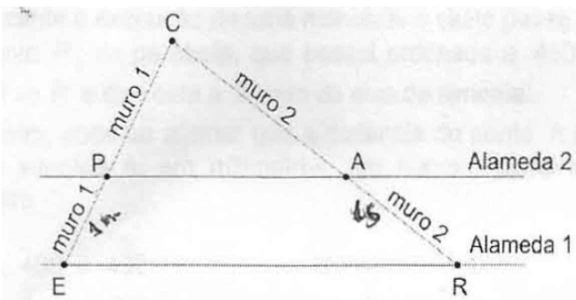
$x = 62{,}5\%$

Logo, x está entre 62 e 64

Alternativa B

Questão 14

Um parque está sendo construído na cidade de Barbacena. Através das alamedas 1 e 2 do parque, que são paralelas, serão construídos dois muros retilíneos, a partir dos pontos E e R, passando pelos pontos P e A, e esses muros se encontrarão no ponto C, conforme figura .

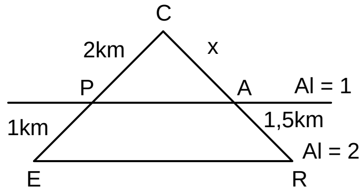


Sabe-se que:
- $\overline{EP}$ 1km
- $\overline{RA}$ 1,5 km
- São construídos 12 m de cada muro, por dia.
- O muro 1 será totalmente construído em 250 dias.
- As obras das construções dos muros 1 e 2 terminarão no mesmo dia.

Se a obra do muro 1 iniciou dia 1º de agosto de 2013, e sabendo ainda que as obras dos dois muros foram realizadas em dias consecutivos (ou seja, não houve dia de folga em nenhuma das obras), então a obra do muro 2 teve inicio dia:

a) 31 de março de 2013.
b) 30 de março de 2013.
c) 29 de março de 2013.
d) 28 de março de 2013.

Resolução



Rendimento de 12 m/dia

Usando Tales: $\frac{2}{1} = \frac{x}{1,5} \therefore 3\text{km}$

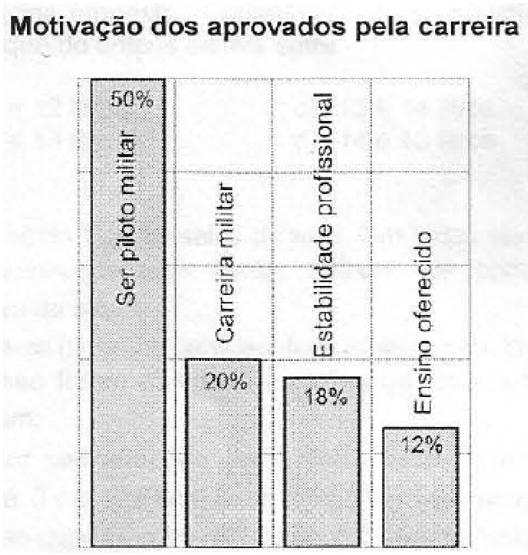
O muro 2 possui exatamente 4,5 km e levará 375 dias para ser construído. Nota-se que o muro 2 foi inicialmente construído 125 dias antes do dia 1º de Agosto. Ou seja, no dia 29/03/2013

Alternativa C

Questão 15

A tabela e os gráficos abaixo são referentes aos candidatos

	Realizaram concurso		Aprovados no concurso	
	Nº de candidatos	%	Nº de candidatos	%
Norte	477	5,4	33	4,2
Nordeste	710	8,0	59	7,2
Centro-oeste	554	6,3	39	4,8
Sudeste	6605	74,8	659	80
Sul	482	5,5	31	3,8
Total	8828	100	821	100



Analisando as informações acima, afirma-se sobre o Concurso CPCAR 2012:

I. Os candidatos da região Sudeste, além do maior número na realização do concurso, também tiveram maior percentual entre os aprovados.
II. Dentre os aprovados que vieram de Escola Pública Estadual, é possível não haver nenhum da Região Sudeste.
III. Dentre os aprovados que não foram motivados pelo ensino oferecido, é possível que só haja candidatos vindos da Região Sudeste.

Julgue cada afirmativa em (V) verdadeira ou (f) falsa e marque a alternativa que contém a sequência correta.

a) V-V-V
b) V-F-F
c) F-F -V
d) V-F-V

Resolução

I. Verdadeiro. Como podemos observar na tabela de distribuição por região do Brasil, temos que a região sudeste lidera tanto os realizadores, quanto aprovados.

II. Falso. Devemos calcular: $\frac{21}{100}.821 = 172,41$

Total de alunos aprovados de outras regiões é 162.

Logo, não podemos afirmar que não existe aluno de escola pública estadual da região sudeste.

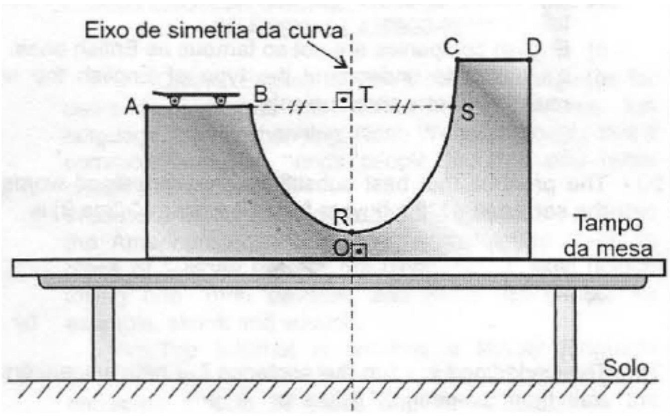
III. Falso. Observando os dados, temos que 80% dos aprovados são de origem da região sudeste e os alunos que não foram motivados pelo ensino oferecido correspondem a 88% do total.

Assim: V-F-F

Alternativa B

Questão 16

Gustavo está brincando com seu skate de dedo numa pista que foi projetada segundo uma modelagem matemática, descrita a seguir.

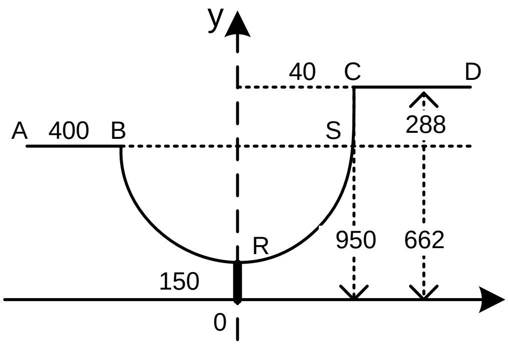


• A pista está sobre o tampo de uma mesa apoiada no solo.
• O tampo da mesa e o eixo de simetria da curva, indicados no desenho, coincidem com os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$, respectivamente, do sistema cartesiano ortogonal.
• O ponto O é a origem do sistema cartesiano ortogonal.
• A e B são pontos que pertencem a uma reta paralela ao eixo $\overrightarrow{Ox}$.
• C e O são pontos que pertencem a uma reta paralela á reta AS e distante desta 288 mm.
• A curva da pista de 8 até C coincide com um arco de parábola.
• A distância de C ao eixo de simetria da parábola é 40mm.
• O ponto R, que é o mais baixo do arco de parábola, está a 150 mm do ponto O.
• $\overline{AB} = 400$mm.

Durante a execução de uma manobra, o skate passa por um ponto P , da parábola, que possui ordenada a 450 mm do ponto R e que está a 30 mm do eixo de simetria. Assim, pode-se afirmar que a distância do ponto A ao eixo de simetria ê, em milímetros, um número compreendido entre:

a) 400 e 430
b) 430 e 460
c) 460 e 490
d) 490 e 520

Resolução



São Pontos da parábola:

P = (30, 6000)
C = (40, 950)
B = (x, 662)

$Y = ax^2 + 150$
$600 = a(30)^2 + 150$
$900a = 450$
$a = \frac{1}{2}$
Então, $y = \frac{x^2}{2} + 150$

Calculando x:
$\frac{x^2}{2} = 662 - 150$

$x^2 = 2.512$
$x = \sqrt{1024}$
$x = 32$

A distância de “A” até ao eixo de simetria à parábola é dada por 400 + x.
Ou seja, 400 + 32 = 432.

Alternativa B